MATERIAŁY XXV KONFERENCJI SZKOLENIOWEJ Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ ZESPOLONEJ

2004 **Łódź** **str. 15**

WARTOŚCI KRYTYCZNE W NIESKOŃCZONOŚCI ODWZOROWAŃ WIELOMIANOWYCH I DIAGRAMY NEWTONA

Mateusz Masternak (Kielce)

Wstęp

Rozważmy wielomian dwóch zmiennych $f = f(X, Y) \in \mathbf{C}[X, Y]$ dodatniego stopnia. Wielomian f wyznacza pęk krzywych rzutowych $C^t, t \in \mathbf{C}$, gdzie C^t jest domknięciem rzutowym krzywej afinicznej $f(X, Y) - t = 0$. Dobrze znany jest fakt, że zbiór $\Lambda(f)$ liczb $t \in \mathbf{C}$ dla których liczby Milnora krzywych C^t w punktach na prostej w nieskończoności L_∞ zmieniają się, jest skończony. Nazywamy go zbiorem wartości krytycznych w nieskończoności wielomianu f. W ostatnich latach wielu autorów podejmowało badania związane z opisem i oszacowaniem zbioru $\Lambda(f)$ (por. [D], [GP1], [GP2], [GS], [K]). W pracach [LO1] i [LO2] autorzy podają dość skomplikowany, wykorzystujący technikę modyfikacji torycznych, dowód twierdzenia o oszacowaniu liczby elementów zbioru $\Lambda(f)$ w terminach diagramu Newtona wielomianu f. Celem tej noty jest przedstawienie wspomnianego twierdzenia i zaanonsowanie jego alternatywnego dowodu jako wniosku z rezultatów uzyskanych w pracach [LMP1], [LMP2], [M1] i [M2].

1 Diagramy Newtona

Niech $f = f(X,Y) = \sum c_{\alpha\beta} X^\alpha Y^\beta \in \mathbf{C}[X,Y]$ będzie wielomianem dodatniego stopnia o nośniku $\operatorname{supp} f = \{(\alpha,\beta) \in {\mathbf{Z}_+}^2 : c_{\alpha\beta} \neq 0\}$. Określamy jego diagram Newtona: $\Delta(f) =$ otoczka wypukła zbioru $\operatorname{supp} f \cup \{(0,0)\}$. Dla każdego odcinka brzegowego S wielokąta $\Delta(f)$ rozważamy $|S|_1$ i $|S|_2$ długości jego rzutów odpowiednio na oś poziomą i pionową. Przez $r(S)$ oznaczamy największy wspólny dzielnik liczb $|S|_1$ i $|S|_2$.

Załóżmy, że wielokąt $\Delta(f)$ ma niepuste wnętrze. Istnieją zatem dwa różne odcinki brzegowe T_1 i T_2 diagramu $\Delta(f)$ o wspólnym wierzchołku w początku układu. Przyjmijmy, że T_1 leży poniżej T_2. Niech (a_i, b_i), dla $i = 1, 2$, będzie punktem zbioru $(\operatorname{supp} f \setminus \{(0,0)\}) \cap T_i$ położonym najbliżej początku układu. Oznaczamy $\varepsilon(f) = 1$ jeśli $\max(b_1, a_2) \geq 2$ oraz $\varepsilon(f) = 0$ jeśli $\max(b_1, a_2) \leq 1$. Określamy łamaną Newtona $\mathcal{N}(f)$ wielomianu f jako zbiór odcinków brzegowych wielokąta $\Delta(f)$ nie leżących na osiach. Rozważamy podzbiory łamanej Newtona: $\mathcal{N}^*(f) = \{S \in \mathcal{N}(f) : S \neq T_1, T_2\}$ oraz $\mathcal{N}^{**}(f) = \mathcal{N}(f) \setminus \mathcal{N}^*(f)$. Zbiór $\mathcal{N}^{**}(f)$ jest co najwyżej dwuelementowy. Oznaczamy $\operatorname{in}(f,S) = \sum_{(\alpha,\beta)\in S} X^\alpha Y^\beta$. Jeżeli $\psi \in \mathbf{C}[X,Y]$ jest formą quasi-jednorodną to niech $r(\psi)$ oznacza liczbę jej nierozkładalnych czynników różnych od X i Y. Piszemy $r(f,S) = r(\operatorname{in}(f,S))$. Zauważmy, że $r(f,S) \leq r(S)$.

2 Wartości krytyczne w nieskończoności

Niech $f : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}$ będzie wielomianem stopnia $N > 0$. Dla każdego $t \in \mathbf{C}$ rozważamy krzywą rzutową $C^t : F(X,Y,Z) - tZ^N$ gdzie forma jednorodna F jest ujednorodnieniem wielomianu f. Krzywa ta przecina prostą w nieskończoności w skończonym zbiorze punktów $(C^t)_\infty = C_\infty$ niezależnym od t. Dla każdego $p \in C_\infty$ rozważamy $\mu_p^t =$ liczba Milnora C_t w punkcie p. Przyjmijmy $\mu_p^{\text{gen}} = \inf\{\mu_p^t : t \in \mathbf{C}\}$. Dowodzi się, że zbiór $\Lambda(f) = \{t \in \mathbf{C} : \mu_p^t > \mu_p^{\text{gen}}$ dla pewnego $p \in \mathbf{C}\}$ jest skończony. Nazywamy go zbiorem wartości krytycznych wielomianu f (por. [B], [K]).

Twierdzenie 2.1 (Le Van Thanh, M. Oka) *Załóżmy, że diagram $\Delta(f)$ ma niepuste wnętrze. Wtedy*

$$\sharp(\Lambda(f)) \leq \sum_{S \in \mathcal{N}^*(f)} (r(S) - r(f,S)) + \sum_{S \in \mathcal{N}^{**}(f)} r(\partial \operatorname{in}(f,S)) + \varepsilon(f)$$

gdzie $\partial = \frac{\partial}{\partial Y}$ jeli $S = T_1$ oraz $\partial = \frac{\partial}{\partial X}$ jeśli $S = T_2$.

Uwaga. *Gdy diagram $\Delta(f)$ ma puste wnętrze to $f(X,Y) = \varphi(X^p Y^q)$ gdzie φ jest wielomianem dodatniego stopnia jednej zmiennej oraz $NWD(p,q) = 1$. Wtedy*

$$\sharp(\Lambda(f)) \leq \deg \varphi - \operatorname{ord}(\varphi - \varphi(0)) + \varepsilon(f)$$

gdzie $\varepsilon(f) = 1$ *jeśli* $\max(p, q, \mathrm{ord}(\varphi - \varphi(0))) \geq 2$ *oraz* $\varepsilon(f) = 0$ *jeśli* $\max(p, q) = \mathrm{ord}(\varphi - \varphi(0)) = 1$.

Przykład 1. Niech $f(X,Y) = X^2Y + XY^2 + X^5Y^3 + X^3Y^5$. Wtedy $\mathcal{N}^*(f) = \{S, U, V\}$ gdzie U jest odcinkiem o wierzchołkach w punktach $(2,1)$ i $(5,3)$, S jest odcinkiem o wierzchołkach w punktach $(5,3)$ i $(3,5)$ oraz V jest odcinkiem o wierzchołkach w punktach $(3,5)$ i $(1,2)$. Jest $r(U) = r(V) = r(f,U) = r(f,V) = 1$ oraz $r(S) = r(f,S) = 2$. Ponadto $\mathcal{N}^{**}(f) = \{T_1, T_2\}$ gdzie wierzchołkami odcinków T_1 i T_2 są odpowiednio punkty $(0,0)$ i $(2,1)$ oraz $(0,0)$ i $(1,2)$. Zauważmy, że $r(\frac{\partial}{\partial Y}\mathrm{in}(f,T_1)) = r(\frac{\partial}{\partial X}\mathrm{in}(f,T_2)) = 0$ oraz $\varepsilon(f) = 0$. Zatem $\Lambda(f) = \emptyset$.

Przykład 2. Niech $f(X,Y) = Y^{2k}(X+Y)^2 + (X+Y)Y$, $k > 1$. Wtedy $\mathcal{N}^*(f) = \{S, U\}$ gdzie S jest odcinkiem o wierzchołkach w punktach $(1,1)$ i $(2,2k)$ zaś U jest odcinkiem o wierzchołkach w punktach $(2,2k)$ i $(0,2k+2)$. Jest $r(S) = r(f,S) = 1$ oraz $r(U) = 2$ i $r(f,U) = 1$. Ponadto $\mathcal{N}^{**}(f) = \{T_1\}$ gdzie T_1 jest odcinkiem łączącym punkty $(0,0)$ i $(1,1)$ ale $r(\frac{\partial}{\partial Y}\mathrm{in}(f,T_1)) = 0$. Zarazem $\varepsilon(f) = 0$. Zatem $\sharp(\Lambda(f)) \leq 1$. Oszacowanie jest dokładne bowiem $\Lambda(f) = \{0\}$.

Przykład 3. (Por. [H]). Niech $f(X,Y) = X^{p-q}Y^{1+q} - Y$, $0 < q < p$. Wtedy $\mathcal{N}^*(f) = \{S\}$ gdzie S jest odcinkiem o wierzchołkach w punktach $(0,1)$ i $(p-q, 1+q)$. Jest $r(S) = r(f,S) = \mathrm{NWD}(p-q, q)$. Ponadto $\mathcal{N}^{**}(f) = \{T_1\}$ gdzie T_1 jest odcinkiem o wierzchołkach w punktach $(0,0)$ i $(p-q, 1+q)$, ale $r(\frac{\partial}{\partial Y}\mathrm{in}(f,T_1)) = 0$. Zarazem $\varepsilon(f) = 1$. Zatem $\sharp(\Lambda(f)) \leq 1$. Oszacowanie jest dokładne bowiem $\Lambda(f) = \{0\}$.

Literatura

[B] **S.A. Broughton**, *Milnor numbers and the topolgy of polynomial hypersurfaces*, Invent. Math. 92 (1988), 217-241.

[D] **A.H. Durfee**, *Five definitions of critical point at infinity*, Singularities: the Brieskorn Anniversary Volume (Progress in Mathematics; 162).

[GP1] **J. Gwoździewicz, A. Płoski**, *Charakterystyka Eulera i osobliwości w nieskończoności krzywych algebraicznych*, Materiały na XIX Konferencję Szkoleniową z Geometrii Analitycznej i Algebraicznej Zespolonej, Wyd. UŁ, Łódź 1998.

[GP2] **J. Gwoździewicz, A. Płoski**, *Wielomiany o jednej wartości krytycznej w nieskończoności*, Materiały na XXI Konferencję Szkoleniową z Geometrii Analitycznej i Algebraicznej Zespolonej, Wyd. UŁ, Łódź 2000.

[GP3] **J. Gwoździewicz, A. Płoski**, *Formulae for the singularities at infinity of plane algebraic curves*, Univ. Iag. Acta Math. Fasc XXXIX (2001).

[GS] **J. Gwoździewicz, A. Sękalski**, *Wielomian który ma co najmniej k różnych wartości krytycznych w nieskończoności*, Materiały na XXIV Konferencję Szkoleniową z Geometrii Analitycznej i Algebraicznej Zespolonej, Wyd. UŁ, Łódź 2003.

[H] **Huy Vui Ha**, *Nombers de Łojasiewicz et singularité à l' infini des polynômes de deux variables complexes*, CRAS, 311, série I, 429-432 (1990).

[K] **T. Krasiński**, *Poziomice wielomianów dwóch zmiennych a hipoteza Jakobianowa*, Acta Univ. Łodz. UŁ, Łódź (1991).

[LMP1] **A. Lenarcik, M. Masternak, A. Płoski**, *Factorization of the polar curve and the Newton polygon*, Kodai Math. J. 26 (2003).

[LMP2] **A. Lenarcik, M. Masternak, A. Płoski**, *Special polars and cricital values at infinity*, praca w przygotowaniu.

[LO1] **Le Van Thanh, M. Oka** , *Note on estimation of the number of the critical values at infinity*, Kodai Math J. 17 (1994), 409–419.

[LO2] **Le Van Thanh, M. Oka** , *Estimation of the number of the critical values at infinity of a polynomial function* $f : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}$, publ. RIMS Univ. 31 (1995), 577-598.

[M1] **M. Masternak**, *Diagramy Newtona krzywych algebraicznych*, Materiały na XVIII Konferencję Szkoleniową z Geometrii Analitycznej i Algebraicznej Zespolonej, Wyd. UŁ, Łódź 1997.

[M2] **M. Masternak**, *Invariants of singularities of polynomials in two complex variables and the Newton diagrams*, Univ. Iag. Acta Math. Fasc XXXIX (2001).

CRITICAL VALUES AT INFINITY OF A POLYNOMIAL MAPPINGS AND THE NEWTON DIAGRAMS

Summary. We present a theorem due to Le Van Thanh and Mutsuo Oka that gives an estimation of the number of the critical values at infinity in terms of the Newton diagrams.

Łódź, 5 – 9 stycznia 2004 r.