**MATERIAŁY XXI KONFERENCJI SZKOLENIOWEJ
Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ
ZESPOLONEJ**

2000 **Łódź** **str. 17**

WŁAŚCIWOŚĆ ODWZOROWAŃ WIELOMIANOWYCH I HIPOTEZA JAKOBIANOWA

M. Masternak (Kielce)

Niech $F = (P, Q) : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ będzie odwzorowaniem wielomianowym którego jakobian jest stałą różną od zera. L.A. Campbell udowodnił w pracy [C], wzmacniając wcześniejsze rezultaty innych autorów, że jeżeli restrykcja F do składowej nierozkładalnej włókna $P^{-1}(0)$ jest odwzorowaniem właściwym to F jest automorfizmem wielomianowym. Naszym celem jest podanie krótkiego dowodu twierdzenia Campbella w oparciu o pewne znane fakty. Zarazem, przypomnimy kilka innych rezultatów dotyczących właściwości i hipotezy jakobianowej.

Odwzorowanie $F = (P, Q) : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ takie, że $JacF \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ będziemy nazywać odwzorowaniem jakobianowym. Słynna hipoteza jakobianowa jest przypuszczeniem, że każde odwzorowanie jakobianowe jest automorfizmem wielomianowym. Istnieje szereg twierdzeń mówiących, że pewne dodatkowe założenia, obok stałości jakobianu, gwarantują odwracalność odwzorowania F. Między innymi mamy

Twierdzenie 1. *Jeżeli odwzorowanie jakobianowe F jest właściwe to jest ono automorfizmem wielomianowym.*

Twierdzenie 1 wynika z następującego faktu topologicznego którego uzasadnienie można znaleźć książce [L] (Propozycje 1 i 2, str. 64, 65):

Twierdzenie 2. *Właściwy, lokalny homeomorfizm z niepustej i spójnej przestrzeni Hausdorffa do $\mathbb{R}^n$ jest globalnym homeomorfizmem.*

Na początku lat 90-tych J. Chądzyński i T. Krasiński [CH-K] oraz niezależnie L. Drużkowski [D] pokazali, że założenie o właściwości odwzorowania F w twierdzeniu 1 można osłabić.

Twierdzenie 3 (Chądzyński-Krasiński, Drużkowski). *Jeżeli odwzorowanie $F = (P, Q) : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ jest jakobianowe oraz $Q/_{\{P(X,Y)=0\}} : \{P(X, Y) = 0\} \to \mathbb{C}$ jest odwzorowaniem właściwym to F jest automorfizmem wielomianowym.*

Z kolei w roku 95 L.A.Campbell podał następujące wzmocnienie powyższego rezultatu:

Twierdzenie 4 (Campbell, [C]**).** *Niech F będzie odwzorowaniem jakobianowym oraz niech V będzie nierozkładalną składową krzywej $\{P(X, Y) = 0\}$. Jeżeli odwzorowanie $Q/_V : V \to \mathbb{C}$ jest właściwe, to F jest automorfizmem wielomianowym.*

Dowód twierdzenia Campbella. Zauważmy, że odwzorowanie $Q/_V : V \to \mathbb{C}$ jest właściwym, lokalnym biholomorfizmem (ponieważ $JacF = const. \neq 0$). Zatem, wobec twierdzenia 2, jest ono biholomorfizmem. Korzystając z twierdzenia Ruska-Winiarskiego (zob. [R-W]) mówiącego, że odwzorowanie holomorficzne pomiędzy krzywymi algebraicznymi jest regularne, stwierdzamy, że odwzorowanie $(Q/_V)^{-1} : \mathbb{C} \to V$ jest regularne, czyli że odwzorowanie $Q/_V$ jest biregularne. Zastosujemy teraz twierdzenie Abhyankara-Moha-Suzuki, które przytoczymy w dogodnej dla nas wersji (zob. [A-M], [S]).

Twierdzenie 5 (Abhyankar-Moh-Suzuki). *Niech V będzie afiniczną krzywą biregularną z $\mathbb{C}$. Wtedy wielomian minimalny opisujący krzywą V jest współrzędną automorfizmu wielomianowego.*

Korzystając z powyższego stwierdzamy, że istnieje wielomian P_1 będący współrzędną automorfizmu, który dzieli wielomian P. Do zakończenia dowodu wystarczy zastosować następujący (znany specjalistom) fakt:

Twierdzenie 6. *Niech $F = (P, Q) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ będzie odwzorowaniem jakobianowym. Jeżeli wielomian P posiada dzielnik P_1 będący współrzędną automorfizmu wielomianowego to F jest automorfizmem, co więcej $P = const.P_1$*

Krótki dowód ostatniego twierdzenia jest podany w pracy [G-P]. Jest on oparty na dobrze znanej własności mówiącej że diagramy Newtona współrzędnych odwzorowania jakobianowego są wielokątami podobnymi (zob. [N-N]).

Bibliografia

[A-M] S.S. Abhyankar, T. Moh, *Embeddings of the line in the plane*, J. Reine Angew. Math. 276 (1975), 148-166.

[C] L.A. Campbell, *Partial Properness and the Jacobian Conjecture*, Appl. Math. Lett., **Vol. 9, No. 2** (1995), 5–10.

[CH-K] J. Chądzyński, T. Krasiński, *Properness and the Jacobian conjecture in* $\mathbb{C}^2$, Bull. Soc. Sci. Lett., Łódź, (1992), Vol. XIV, 132, 13–19.

[D] L. M. Drużkowski, *A geometric approach to the Jacobian conjecture in* $\mathbb{C}^2$, Ann. Pol. Math. **55** (1991), 95–101.

[G-P] J. Gwoździewicz, A. Płoski, *On the singularities at infinity of plane algebraic curves*, Max-Planck-Institut für Mathematik Bonn (Preprint Series 1998), (98).

[L] S. Łojasiewicz, *Wstęp do geometrii analitycznej zespolonej*, PWN Warszawa (1988).

[N-N] A. Nowicki, Y. Nakai, *On Appelgate-Onishi's Lemmas*, J. Pure Appl. Algebra **51, 58** (1988 and 1989), 305–310 and 101.

[R-W] K. Rusek, T. Winiarski, *Criteria for Regularity of Holomorphic Mappings*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des sciences mathématique **Vol. XXVIII, No. 9–10** (1980).

[S] M. Suzuki, *Propriétés topologiques des polynômes de deux variables complexes, et automorphismes algébriques de l'espace* $\mathbb{C}^2$, J. Math. Soc. Japan **26(2)** (1974).

Properness of polynomial mappings and the jacobian conjecture

Summary. Let F be a polynomial mapping of complex plane to itself with a constant nonzero Jacobian. In the paper [C] L.A. Campbell proved that if the mapping F is proper along a single connected component of a fiber of a component mapping then it is invertible. The aim of this note is to present a simple proof of the Campbells theorem using some well-known facts.

Łódź, 10 – 14 stycznia 2000 r.