MATERIAŁY XVIII KONFERENCJI SZKOLENIOWEJ Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ ZESPOLONEJ

1997 **Łódź** **str. 33**

DIAGRAMY NEWTONA KRZYWYCH ALGEBRAICZNYCH

M. Masternak (Kielce)

0. Wstęp

W teorii osobliwości ważną rolę pełni pojęcie diagramu Newtona. Metody z nim związane prowadzą do opisu struktury zbioru rozwiązań równania algebraicznego $f(X,Y)=0$ oraz umożliwiają obliczanie niezmienników osobliwości. Szczególnie ważne w tym kontekście są wyniki uzyskane w latach siedemdziesiątych przez A.G.Kusznirenkę ([K$_1$],[K$_2$],[K$_3$]).

Celem tego artykułu jest przedstawienie wyników Kusznirenki w przypadku dwuwymiarowym. Większość podanych dowodów należy do autora. W oparciu o opis diagramu krzywej algebraicznej w terminach diagramów lokalnych ujęty w Lemacie Podstawowym podajemy dowody oszacowań globalnych przez wyprowadzenie ich z odpowiednich oszacowań lokalnych. Rozwinięta technika ma dalsze zastosowania do osobliwości krzywych algebraicznych, które przedstawimy w innym miejscu.

1. Diagramy Newtona i lokalne twierdzenia Kusznirenki

Niech $f=f(X,Y)=\sum c_{\alpha\beta}X^\alpha Y^\beta \in \mathbb{C}[X,Y]$ będzie wielomianem dodatniego stopnia $\deg f = n > 0$. Jego częścią wiodącą $f^+(X,Y)$ nazywamy sumę wszystkich jednomianów postaci $c_{\alpha\beta}X^\alpha Y^\beta$ gdzie $\alpha+\beta=n$. Wielomian f nazywamy dogodnym jeśli $c_{p0} \neq 0$ oraz $c_{0q} \neq 0$ dla pewnych $p, q > 0$.

Dla każdego wielomianu f rozważamy jego nośnik $\operatorname{supp} f = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}_+^2 : c_{\alpha\beta} \neq 0\}$. Definiujemy $\Delta(f) = \operatorname{convex}(\operatorname{supp} f)$ oraz $\Delta_\infty(f) = \operatorname{convex}(\{(0,0)\} \cup \operatorname{supp} f)$ (przez convex danego zbioru rozumiemy jego otoczkę wypukłą na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$). Wielokąty $\Delta(f)$ i $\Delta_\infty(f)$ nazywamy odpowiednio diagramem Newtona i diagramem Newtona w nieskończoności wielomianu f. Dodatkowo rozważamy jeszcze diagram Newtona wielomianu f w zerze $\Delta_0(f) \stackrel{\text{def}}{=}$ domknięcie $\Delta_\infty(f) \setminus \Delta(f)$.

Załóżmy, że f jest dogodny. Jeżeli $p, q > 0$ są najmniejszymi liczbami całkowitymi takimi, że $(p, 0)$, $(0, q) \in \operatorname{supp} f$ to $\Delta_0(f)$ jest wielokątem ograniczonym odcinkami łączącymi $(0,0)$ z $(p,0)$ oraz $(0,0)$ z $(0,q)$ oraz odcinkami brzegowymi diagramu $\Delta(f)$ oddzielającymi go od początku układu (por. rys. 1).

Oczywiście $\Delta_\infty(f) = \Delta_0(f) \cup \Delta(f)$. Jeżeli $(0,0) \in \operatorname{supp} f$ to $\Delta_\infty(f) = \Delta(f)$ i $\Delta_0(f) = \emptyset$. Przez $\partial\Delta_0(f)$ (odp. $\partial\Delta_\infty(f)$) oznaczamy zbiór odcinków brzegowych wielokąta $\Delta_0(f)$ (odp. $\Delta_\infty(f)$) nie zawartych w osiach.

Dla dowolnego odcinka S brzegu wielokąta $\Delta(f)$ definiujemy część główną f na S

$$\operatorname{in}(f, S)(X, Y) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{(\alpha,\beta)\in S} c_{\alpha\beta} X^\alpha Y^\beta.$$

W twierdzeniach o diagramach Newtona ważną rolę pełnią różne wersje pojęcia niedegeneracji.

Niech $f(X,Y)$, $g(X,Y)$ będzie parą wielomianów i niech S, T będą dowolnymi odcinkami brzegowymi diagramów $\Delta(f)$ i $\Delta(g)$. Parę (f, g) nazywamy niezdegenerowaną względem pary (S, T) jeżeli spełniony jest jeden z warunków

(i) S nie jest równoległy do T,

(ii) S i T są równoległe ale diagramy $\Delta(f)$ i $\Delta(g)$ leżą po różnych stronach odpowiednio odcinków S i T.

(iii) S i T są równoległe i diagramy $\Delta(f)$ i $\Delta(g)$ leżą po tych samych stronach odpowiednio odcinków S i T, ale układ $\mathrm{in}(f,S)(X,Y) = \mathrm{in}(g,T)(X,Y) = 0$ nie ma rozwiązań w $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ gdzie $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Parę (f,g) nazywamy niezdegenerowaną w zerze (w nieskończoności) jeżeli (f,g) jest niezdegenerowana względem (S,T) dla dowolnych $S \in \partial\Delta_0(f)$ i $T \in \partial\Delta_0(g)$ ($S \in \partial\Delta_\infty(f)$ i $T \in \partial\Delta_\infty(g)$).

Uwaga. W przypadku gdy wielomiany f i g mają ten sam wspólny diagram $\Delta = \Delta(f) = \Delta(g)$ (wtedy $\Delta_0 = \Delta_0(f) = \Delta_0(g)$ i $\Delta_\infty = \Delta_\infty(f) = \Delta_\infty(g)$) to niedegeneracja pary (f,g) w zerze (w nieskończoności) oznacza, że dla każdego odcinka $S \in \partial\Delta_0$ ($S \in \partial\Delta_\infty$) układ $\mathrm{in}(f,S)(X,Y) = \mathrm{in}(g,S)(X,Y) = 0$ nie ma rozwiązań w $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$.

Podobnie jak dla pary wprowadzamy również pojęcie niedegeneracji dla jednego wielomianu. Niech $f(X,Y) \in \mathbb{C}[X,Y]$ i niech S będzie odcinkiem brzegowym wielokąta $\Delta(f)$. Mówimy, że wielomian f jest niezdegenerowany względem odcinka S jeżeli układ równań

$$\frac{\partial}{\partial X}\,\mathrm{in}(f,S)(X,Y) = \frac{\partial}{\partial Y}\,\mathrm{in}(f,S)(X,Y) = 0$$

nie ma rozwiązań w $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$.

Wielomian f nazywamy niezdegenerowanym w zerze (w nieskończoności) jeżeli f jest niezdegenerowany względem każdego odcinka $S \in \partial\Delta_0(f)$ ($S \in \partial\Delta_\infty(f)$).

Jeżeli $f(X,Y), g(X,Y) \in \mathbb{C}[X,Y]$ to przez $(f,g)_P$ oznaczamy krotność przecięcia krzywych $f(X,Y) = 0$ i $g(X,Y) = 0$ w punkcie $P \in \mathbb{C}^2$. Definicję krotności przyjmujemy za [F]. Nasze rozważania oprzemy na następującym twierdzeniu:

Twierdzenie 1.1 (Kusznirenko, zob. [A], [K_1], [P])**.** *Niech $f(X,Y)$, $g(X,Y) \in \mathbb{C}[X,Y]$ będą wielomianami dogodnymi takimi, że $\Delta_0(f) = \Delta_0(g) = \Delta_0$. Wtedy $(f,g)_0 \geq 2\,\mathrm{pole}\,\Delta_0$. Równość zachodzi gdy para (f,g) jest niezdegenerowana w zerze.*

Jako zastosowanie powyższego udowodnimy

Twierdzenie 1.2 (Kusznirenko, zob. [K_2], [K_3])**.** *Niech $f(X,Y) \in \mathbb{C}[X,Y]$ będzie wielomianem dogodnym i niech*

$$\mu_0(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial X}, \frac{\partial f}{\partial Y}\right)_0$$

będzie jego lokalną liczbą Milnora. Wtedy

$$\mu_0(f) \geq 2\,\mathrm{pole}\,\Delta_0(f) - \mathrm{ord}\, f(X,0) - \mathrm{ord}\, f(0,Y) + 1.$$

Równość zachodzi gdy f jest niezdegenerowany w zerze.

Podane oszacowanie dla liczby Milnora otrzymujemy z oszacowania 1.1 dla krotnosci przecięcia. Decydującą rolę pełni podany niżej lemat.

Lemat 1.3. *Niech $f(X,Y) \in \mathbb{C}[X,Y]$ będzie wielomianem dodatniego stopnia bez stałego wyrazu. Wtedy*

(1) *Dla prawie wszystkich $(\mu,\nu) \in \mathbb{C}^2$*

$$\operatorname{supp}\left(\mu X\frac{\partial f}{\partial X} + \nu Y\frac{\partial f}{\partial Y}\right) = \operatorname{supp} f.$$

(2) *Jeżeli f jest dogodny i niezdegenerowany w zerze (w nieskończoności) to dla prawie wszystkich (μ,ν), $(\xi,\eta) \in \mathbb{C}^2$ para*

$$\left(\mu X\frac{\partial f}{\partial X} + \nu Y\frac{\partial f}{\partial Y}, \xi X\frac{\partial f}{\partial X} + \eta Y\frac{\partial f}{\partial Y}\right)$$

jest niezdegenerowana w zerze (w nieskończoności).

Dowód lematu. (Ad. 1). Niech $f(X,Y) = \sum_{(\alpha,\beta)\in N} c_{\alpha\beta}X^\alpha Y^\beta$ gdzie $N = \operatorname{supp} f$. Ustalmy $(\mu,\nu) \in \mathbb{C}^2$ i niech

$$f_1(X,Y) = \mu X\frac{\partial f}{\partial X}(X,Y) + \nu Y\frac{\partial f}{\partial Y}(X,Y).$$

Nietrudno sprawdzić, że $f_1(X,Y) = \sum_{(\alpha,\beta)\in N}(\mu\alpha+\nu\beta)c_{\alpha\beta}X^\alpha Y^\beta$. Zatem jeżeli $\mu\alpha+\nu\beta \neq 0$ dla wszystkich $(\alpha,\beta) \in N$ to $\operatorname{supp} f_1 = \operatorname{supp} f$.

(Ad. 2). Ustalmy (μ,ν), $(\xi,\eta) \in \mathbb{C}^2$ dla których zachodzi (1). Załóżmy dodatkowo, że $\mu\eta - \nu\xi \neq 0$. Niech

$$f_1(X,Y) = \mu X\frac{\partial f}{\partial X}(X,Y) + \nu Y\frac{\partial f}{\partial Y}(X,Y)$$

oraz

$$f_2(X,Y) = \xi X\frac{\partial f}{\partial X}(X,Y) + \eta Y\frac{\partial f}{\partial Y}(X,Y).$$

Oczywiście $\Delta(f_1) = \Delta(f_2) = \Delta(f)$. Niech S będzie odcinkiem brzegowym wielokąta $\Delta(f)$. Wystarczy sprawdzić, że jeżeli układ

$$\frac{\partial}{\partial X}\operatorname{in}(f,S)(X,Y) = \frac{\partial}{\partial Y}\operatorname{in}(f,S)(X,Y) = 0$$

nie ma rozwiązań w $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ to również układ

$$\operatorname{in}(f_1,S)(X,Y) = \operatorname{in}(f_2,S)(X,Y) = 0$$

nie ma rozwiązań w $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$. Ale to wynika wprost z równości:

$$\operatorname{in}(f_1,S)(X,Y) = \mu X\frac{\partial}{\partial X}\operatorname{in}(f,S)(X,Y) + \nu Y\frac{\partial}{\partial Y}\operatorname{in}(f,S)(X,Y),$$

$$\mathrm{in}(f_2,S)(X,Y)=\xi X\frac{\partial}{\partial X}\,\mathrm{in}(f,S)(X,Y)+\eta Y\frac{\partial}{\partial Y}\,\mathrm{in}(f,S)(X,Y)$$

oraz z warunku $\mu\eta-\nu\xi\neq 0$.

Dowód twierdzenia 1.2. Ustalmy (μ,ν), $(\xi,\eta)\in\mathbb{C}^2$ dla których spełnione są warunki (1) i (2) lematu 1.3 Podobnie jak w dowodzie lematu określamy wielomiany $f_1(X,Y)$ i $f_2(X,Y)$. Spełniają one założenia twierdzenia 1.1, bowiem $\Delta_0(f_1)=\Delta_0(f_2)=\Delta_0(f)$ i f jest dogodny. Mamy więc oszacowanie $(f_1,f_2)_0\geq 2\,\mathrm{pole}\,\Delta_0(f)$. Jeżeli f jest niezdegenerowany w zerze to para (f_1,f_2) jest niezdegenerowana w zerze i wtedy $(f_1,f_2)_0=2\,\mathrm{pole}\,\Delta(f)$.

Zauważmy, że jeżeli pary (μ,ν), (ξ,η) są liniowo niezależne to pary wielomianów $(X\partial f/\partial X,\ Y\partial f/\partial Y)$ oraz (f_1,f_2) generują ten sam ideał w $\mathbb{C}[[X,Y]]$. Wobec tego

$$\left(X\frac{\partial f}{\partial X},Y\frac{\partial f}{\partial Y}\right)_0=(f_1,f_2)_0.$$

Zatem

$$\left(X\frac{\partial f}{\partial X},Y\frac{\partial f}{\partial Y}\right)_0\geq 2\,\mathrm{pole}\,\Delta_0(f).$$

Ale

$$\begin{aligned}\left(X\frac{\partial f}{\partial X},Y\frac{\partial f}{\partial Y}\right)_0&=\left(\frac{\partial f}{\partial X},\frac{\partial f}{\partial Y}\right)_0+\left(\frac{\partial f}{\partial X},Y\right)_0+\left(X,\frac{\partial f}{\partial Y}\right)_0+(X,Y)_0\\&=\mu_0(f)+\mathrm{ord}\,f(X,0)+\mathrm{ord}\,f(0,Y)-1.\end{aligned}$$

Stąd $\mu_0(f)\geq 2\,\mathrm{pole}\,\Delta_0(f)-\mathrm{ord}\,f(X,0)-\mathrm{ord}\,f(0,Y)+1$ i jeżeli f jest niezdegenerowany w zerze to zachodzi równość.

2. Diagramy Newtona w afinicznych układach współrzędnych

Jeżeli $U=(\vec{u};\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ jest afinicznym reperem płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ (tzn. $\vec{u}$, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2\in\mathbb{R}^2$ i $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ są $\mathbb{R}$–niezależne) to definiujemy nośnik wielomianu $f=f(X,Y)\in\mathbb{C}[X,Y]$ w układzie U: $\mathrm{supp}^U f\overset{\mathrm{def}}{=}\left\{\vec{u}+\alpha\vec{e}_1+\beta\vec{e}_2:(\alpha,\beta)\in\mathrm{supp}\,f\right\}$ oraz diagram Newtona wielomianu $f(X,Y)$ w układzie U: $\Delta^U(f)\overset{\mathrm{def}}{=}\mathrm{convex}(\mathrm{supp}^U f)$. Podobnie jak w przypadku standardowym określamy $\Delta^U_\infty(f)\overset{\mathrm{def}}{=}\mathrm{convex}(\{\vec{u}\}\cup\mathrm{supp}^U f)$ oraz $\Delta^U_0(f)\overset{\mathrm{def}}{=}$ domknięcie $\Delta^U_\infty(f)\setminus\Delta^U(f)$ (zob, rys. 2).

Oczywiście $\Delta^U_\infty(f)=\Delta^U_0(f)\cup\Delta^U(f)$. Jeżeli $f(0,0)\neq 0$ to $(0,0)\in\mathrm{supp}\,f$ więc $\vec{u}\in\mathrm{supp}^U f$ i wtedy $\Delta^U_\infty(f)=\Delta^U(f)$. Analogicznie jak dla standardowego diagramu określamy zbiory odcinków $\partial\Delta^U_0(f)$ i $\partial\Delta^U_\infty(f)$. Jeżeli

$$f(X,Y)=\sum_{(\alpha,\beta)\in\mathrm{supp}\,f}c_{\alpha\beta}X^\alpha Y^\beta\in\mathbb{C}[X,Y]$$

i S jest dowolnym odcinkiem brzegowym wielokąta $\Delta^U(f)$ to definiujemy $\mathrm{in}^U(f,S)(X,Y)$ część główną wielomianu f na S w układzie U jako sumę tych jednomianów $c_{\alpha\beta}X^\alpha Y^\beta$ dla których $\vec{u}+\alpha\vec{e}_1+\beta\vec{e}_2 \in S$. Wprowadzając oznaczenie $(\alpha,\beta)_U := \vec{u}+\alpha\vec{e}_1+\beta\vec{e}_2$ możemy napisać

$$\mathrm{in}^U(f,S)(X,Y) = \sum_{(\alpha,\beta)_U \in S} c_{\alpha\beta}X^\alpha Y^\beta.$$

Jeżeli $U = (\vec{0};\vec{\imath},\vec{\jmath})$ gdzie $\vec{\imath}=(1,0)$, $\vec{\jmath}=(0,1)$ to wprowadzone wyżej pojęcia odpowiadają standardowej konstrukcji diagramu Newtona z poprzedniego paragrafu, tzn. $\Delta^U(f)=\Delta(f)$, $\Delta^U_\infty(f)=\Delta_\infty(f)$, etc.

W poprzednim paragrafie podaliśmy również definicje niedegeneracji wielomianu (pary wielomianów) w zerze i w nieskończoności ściśle związane ze standardowym diagramem Newtona. Nietrudno zauważyć, że odpowiedniki tych definicji sformułowane dla diagramu Newtona w układzie $U=(\vec{u};\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ są im reównoważne. Wynika to z faktu, że diagram $\Delta^U(f)$ jest obrazem diagramu $\Delta(f)$ w przekształceniu afinicznym płaszczyzny: $\mathbb{R}^2 \ni (\alpha,\beta)\to(\alpha,\beta)_U=\vec{u}+\alpha\vec{e}_1+\beta\vec{e}_2\in\mathbb{R}^2$.

Rozważanie diagramu Newtona względem danego układu współrzędnych okazuje się użyteczne gdy chcemy porównać diagramy Newtona różnych wielomianów w naturalny sposób związanych z danym wielomianem f. Niech więc $n=\deg f>0$ i rozważmy ujednorodnienie $F(X,Y,Z)$ wielomianu $f(X,Y)$ dane wzorem $F(X,Y,Z) = Z^n f(X/Z,Y/Z)$. Jak wiadomo krzywa rzutowa $F(X,Y,Z)=0$ jest domknięciem rzutowym krzywej afinicznej $f(X,Y)=0$ i naturalne jest rozważanie krzywych afinicznych $F(1,Y,Z)=0$ oraz $F(X,1,Z)=0$. Jeżeli $f(X,Y)$ nie jest podzielny przez X ani przez Y to ujednorodnieniem wielomianów $F(1,Y,Z)$ oraz $F(X,1,Z)$ jest również wielomian $F(X,Y,Z)$.

Lemat Podstawowy. *Niech $U=(\vec{0};\vec{\imath},\vec{\jmath})$, $V=(n\vec{\imath};\vec{\jmath}-\vec{\imath},-\vec{\imath})$, $W=(n\vec{\jmath};\vec{\imath}-\vec{\jmath},-\vec{\jmath})$. Wtedy*

(1) $\mathrm{supp}^U F(X,Y,1)=\mathrm{supp}^V F(1,Y,Z)=\mathrm{supp}^W F(X,1,Z)$

(2) *jeżeli S jest odcinkiem brzegowym wielokąta $\Delta(f)$ to S jest odcinkiem brzegowym wielokątów $\Delta^V(F(1,Y,Z))$ i $\Delta^W(F(X,1,Z))$ i zachodzą równości:*
$\mathrm{in}^V\big(F(1,Y,Z),S\big)(Y,Z) = Z^n\,\mathrm{in}(f,S)(1/Z,Y/Z)$,
$\mathrm{in}^W\big(F(X,1,Z),S\big)(X,Z) = Z^n\,\mathrm{in}(f,S)(X/Z,1/Z)$.

Dowód. (Ad. 1). Wykażemy pierwszą równość. Oznaczamy $N = \operatorname{supp} f$. Zatem jeśli

$$f(X,Y) = \sum_{(\alpha,\beta)\in N} c_{\alpha\beta}X^\alpha Y^\beta$$

to

$$F(X,Y,Z) = \sum_{(\alpha,\beta)\in N} c_{\alpha\beta}X^\alpha Y^\beta Z^{n-\alpha-\beta}$$

oraz

$$F(1,Y,Z) = \sum_{(n-\beta-\gamma,\beta)\in N} c_{n-\beta-\gamma,\beta}Y^\beta Z^\gamma$$

i mamy

$$\begin{aligned}
&\operatorname{supp}^V F(1,Y,Z) = \\
&= \{\beta(\vec{\jmath}-\vec{\imath}) + \gamma(-\vec{\imath}) + n\vec{\imath}: (\beta,\gamma)\in \operatorname{supp} F(1,Y,Z)\} = \\
&= \{\beta(\vec{\jmath}-\vec{\imath}) + \gamma(-\vec{\imath}) + n\vec{\imath}: \gamma = n-\alpha-\beta \text{ i } (\alpha,\beta)\in N\} = \\
&= \{(n-\beta-\gamma)\vec{\imath} + \beta\vec{\jmath}: \gamma = n-\alpha-\beta \text{ i } (\alpha,\beta)\in N\} = \\
&= \{\alpha\vec{\imath} + \beta\vec{\jmath}: (\alpha,\beta)\in N\} = N = \operatorname{supp}^U F(X,Y,1).
\end{aligned}$$

Dowód równości $\operatorname{supp}^U F(X,Y,1) = \operatorname{supp}^W F(X,1,Z)$ przebiega podobnie.

(Ad. 2). Niech S będzie odcinkiem brzegowym wielokąta $\Delta(f)$. Z udowodnionej równości wynika, że S jest również odcinkiem brzegowym wielokąta $\Delta^V(F(1,Y,Z))$. Stosujemy notację z dowodu punktu (1).

$$\mathrm{in}^V\big(F(1,Y,Z),S\big)(Y,Z) = \sum_{(\beta,\gamma)_V\in S} a_{\beta\gamma}Y^\beta Z^\gamma$$

gdzie $a_{\beta\gamma} = c_{n-\beta-\gamma,\beta}$.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{in}^V\big(F(1,Y,Z),S\big)(Y,Z) = Z^n \sum_{(n-\beta-\gamma,\beta)\in S} a_{\beta\gamma}Y^\beta Z^{\gamma-n} = \\
&= Z^n \sum_{(\alpha,\beta)\in S} a_{\beta,n-\alpha-\beta}Y^\beta Z^{-\alpha-\beta} = Z^n \sum_{(\alpha,\beta)\in S} c_{\alpha,\beta}\left(\frac{1}{Z}\right)^\alpha \left(\frac{Y}{Z}\right)^\beta = \\
&= Z^n\,\mathrm{in}(f,S)\left(\frac{1}{Z},\frac{Y}{Z}\right).
\end{aligned}$$

Dowód drugiej równości przebiega podobnie.

Wprost z definicji diagramu i udowodnionego lematu otrzymujemy

Wniosek 2.1.

$$\Delta(f) = \Delta^V\big(F(1,Y,Z)\big) = \Delta^W\big(F(X,1,Z)\big).$$

W dalszej części naszych rozważań wykorzystamy proste obserwacje geometryczne wynikające z przedstawionych wyżej faktów. Odnotujmy je w postaci uwagi (zob. rys. 3).

Uwaga 2.2. Jeżeli wielomian f jest dogodny i $\deg f = n$ to

(1) $\operatorname{pole} \Delta_\infty(f) + \operatorname{pole} \Delta_0^V\big(F(1,Y,Z)\big) + \operatorname{pole} \Delta_0^W\big(F(X,1,Z)\big) = n^2/2$
(2) $\partial\Delta_0^V\big(F(1,Y,Z)\big) \subset \partial\Delta_\infty(f)$ oraz $\partial\Delta_0^W\big(F(X,1,Z)\big) \subset \partial\Delta_\infty(f)$.

3. Globalne twierdzenia Kusznirenki

Podamy teraz globalne odpowiedniki twierdzeń 1.1 i 1.2 przedstawionych w pierwszej części artykułu.

Twierdzenie 3.1 (Kusznirenko)**.** *Niech $f(X,Y)$, $g(X,Y) \in \mathbb{C}[X,Y]$ będą względnie pierwszymi i dogodnymi wielomianami o identycznych diagramach Newtona (tzn. $\Delta = \Delta(f) = \Delta(g)$, wówczas $\Delta_\infty = \Delta_\infty(f) = \Delta_\infty(g)$). Wtedy*

$$\sum_{P \in \mathbb{C}^2} (f,g)_P \le 2 \operatorname{pole} \Delta_\infty.$$

Równość zachodzi jeżeli para (f,g) jest niezdegenerowana w nieskończoności.

Twierdzenie 3.2 (Kusznirenko)**.** *Niech $f(X,Y) \in \mathbb{C}[X,Y]$ będzie wielomianem dogodnym i niech $\mu(f) = \sum_{P\in\mathbb{C}^2}(\frac{\partial f}{\partial X}, \frac{\partial f}{\partial Y})_P$ będzie jego globalną liczbą Milnora. Zakładamy, że $\mu(f) < +\infty$. Wtedy*

$$\mu(f) \leq 2\,\mathrm{pole}\,\Delta_\infty(f) - \deg f(X,0) - \deg f(0,Y) + 1.$$

Równość zachodzi jeżeli f jest niezdegenerowany w nieskończoności.

Poniżej podamy dowód twierdzenia 3.1 w oparciu o jego lokalną wersję (twierdzenie 1.1) z wykorzystaniem obserwacji przedstawionych w poprzednim paragrafie. Natomiast dowód twierdzenia 3.2 przebiega analogicznie jak dowód twierdzenia 1.2 Zamiast twierdzenia 1.1 wykorzystujemy w nim twierdzenie 3.1 i stosowną część lematu 1.3

Przed przystąpieniem do dowodu twierdzenia 3.1 sformułujemy dwa lematy. Pierwszy z nich jest natychmiastowym wnioskiem z klasycznego twierdzenia Bezouta dla krzywych rzutowych.

Niech $f(X,Y), g(X,Y) \in \mathbb{C}[X,Y]$ będą względnie pierwszymi wielomianami odpowiednio stopni $m > 0$, $n > 0$. Niech $F(X,Y,Z)$ będzie ujednorodnieniem $f(X,Y)$ i podobnie niech $G(X,Y,Z)$ będzie ujednorodnieniem $g(X,Y)$.

Lemat 3.3 ("Nierówność Bezouta")**.** *Przy wprowadzonych oznaczeniach i założeniach*

$$\sum_{P\in\mathbb{C}^2}(f,g)_P \leq mn - \big(F(1,Y,Z),G(1,Y,Z)\big)_0 - \big(F(X,1,Z),G(X,1,Z)\big)_0$$

Lemat 3.4. *Jeżeli para wielomianów dogodnych (f,g) o identycznych diagramach Newtona jest niezdegenerowana w nieskończoności to*

(1) *Krzywe rzutowe $F(X,Y,Z) = 0$ i $G(X,Y,Z) = 0$ przecinają się na prostej w nieskończoności co najwyżej w punktach $(1:0:0)$ i $(0:1:0)$.*
(2) *Pary $(F(1,Y,Z),G(1,Y,Z))$ i $(F(X,1,Z),G(X,1,Z))$ są niezdegenerowane w zerze.*

Dowód. (Ad. 1). Z niedegeneracji pary (f,g) w nieskończoności wynika, że części wiodące $f^+(X,Y)$ i $g^+(X,Y)$ odpowiednio wielomianów $f(X,Y)$ i $g(X,Y)$ nie mają wspólnych zer w $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ Ale $F(X,Y,Z) = f^+(X,Y) + Z\widetilde{F}(X,Y,Z)$ oraz $G(X,Y,Z) = g^+(X,Y) + Z\widetilde{G}(X,Y,Z)$ dla pewnych $\widetilde{F}(X,Y,Z)$, $\widetilde{G}(X,Y,Z) \in \mathbb{C}[X,Y,Z]$.

Zatem jeżeli $(a:b:0) \in \mathbb{P}^2$ jest punktem wspólnym krzywych rzutowych $F(X,Y,Z) = 0$ i $G(X,Y,Z) = 0$ to $(a:b:0) = (1:0:0)$ lub $(a:b:0) = (0:1:0)$.
(Ad. 2). Udowodnimy niedegenerację w zerze pary $\big(F(1,Y,Z),G(1,Y,Z)\big)$. Dla drugiej pary rozumowanie jest analogiczne.
Niech $\Delta = \Delta(f) = \Delta(g)$ i $\deg f = \deg g = n$. Natychmiastowym wnioskiem z Lematu Podstawowego są równości $\Delta = \Delta^V(F(1,Y,Z))$ i $\Delta = \Delta^V(G(1,Y,Z))$

gdzie $V = (n\vec{\imath}; \vec{\jmath}-\vec{\imath}, -\vec{\imath})$ (por. Wniosek 2.1). Stąd $\Delta_0^V(F(1,Y,Z)) = \Delta_0^V(G(1,Y,Z))$. Ustalmy teraz odcinek $S \in \partial\Delta_0^V(F(1,Y,Z)) = \partial\Delta_0^V(G(1,Y,Z)) \subset \partial\Delta_\infty(f) = \partial\Delta_\infty(g)$ (zob. Uwaga 2.2). Dla dowodu niedegeneracji pary $(F(1,Y,Z), G(1,Y,Z))$ w zerze wystarczy sprawdzić, że układ

$$(*) \qquad \mathrm{in}^V\big(F(1,Y,Z),S\big)(Y,Z) = \mathrm{in}^V\big(G(1,Y,Z),S\big)(Y,Z) = 0$$

nie ma rozwiązań w $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$.

Przypuśćmy nie wprost, że punkt $(y_0, z_0) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ jest rozwiązaniem układu (*). Stosując Lemat Podstawowy (p.(2)) stwierdzamy, że wtedy

$$z_0^n \,\mathrm{in}(f,S)\big(\frac{1}{z_0}, \frac{y_0}{z_0}\big) = z_0^n \,\mathrm{in}(g,S)\big(\frac{1}{z_0}, \frac{y_0}{z_0}\big) = 0$$

a to oznacza, że punkt $(1/z_0, y_0/z_0) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ jest rozwiązaniem układu $\mathrm{in}(f,S)(X,Y) = \mathrm{in}(g,S)(X,Y) = 0$, co wobec niedegeneracji pary (f,g) w nieskończoności prowadzi do sprzeczności.

Dowód twierdzenia 3.1. Jak już zauważyliśmy w dowodzie lematu 3.4 z założenia równości diagramów Newtona wielomianów f i g wynika równość diagramów Newtona w zerze w układzie $V = (n\vec{\imath}; \vec{\jmath} - \vec{\imath}, -\vec{\imath})$ $(n = \deg f = \deg g)$ wielomianów $F(1,Y,Z)$ i $G(1,Y,Z)$.

Podobnie stwierdzamy, że identyczne są diagramy Newtona w zerze w układzie $W = (n\vec{\jmath}; \vec{\imath} - \vec{\jmath}, -\vec{\jmath})$ wielomianów $F(X,1,Z)$ i $G(X,1,Z)$. Ponadto mają miejsce analogiczne równości w odniesieniu do "standardowych" diagramów Newtona w zerze wielomianów $F(1,Y,Z)$ i $G(1,Y,Z)$ oraz $F(X,1,Z)$ i $G(X,1,Z)$. Oznaczamy

$$\Delta_I = \Delta_0^V(F(1,Y,Z)) = \Delta_0^V(G(1,Y,Z))$$

oraz

$$\Delta_{II} = \Delta_0^W(F(X,1,Z)) = \Delta_0^W(G(X,1,Z))$$

Twierdzimy, że zachodzą następujące oszacowania:

$$(1) \qquad \begin{aligned} &(F(1,Y,Z), G(1,Y,Z))_0 \geq 2 \,\mathrm{pole}\, \Delta_I \\ &(F(X,1,Z), G(X,1,Z))_0 \geq 2 \,\mathrm{pole}\, \Delta_{II} \end{aligned}$$

Ograniczymy się do uzasadnienia tylko pierwszej nierówności. Niech $D_0 = \Delta_0(F(1,Y,Z)) = \Delta_0(G(1,Y,Z))$. Wielokąt Δ_I jest obrazem wielokąta D_0 w przekształceniu ekwiafinicznym: $\mathbb{R}^2 \ni (\alpha,\beta) \to (\beta, n-\alpha-\beta) \in \mathbb{R}^2$. Stąd wynika, że pola wielokątów D_0 i Δ_I są równe. Załóżmy teraz, że wielomiany $F(1,Y,Z)$, $G(1,Y,Z)$ są dogodne. Wtedy dowodzona nierówność wynika wprost z twierdzenia 1.1 i równości pól wielokątów D_0 i Δ_I. W przypadku gdy $F(1,Y,Z)$ i $G(1,Y,Z)$ nie są dogodne to wobec dogodności f i g stwierdzamy, że wówczas wielomiany $F(1,Y,Z)$ i $G(1,Y,Z)$ mają niezerowe wyrazy wolne.

Wtedy $\Delta_I = \emptyset$ i $(F(1,Y,Z), G(1,Y,Z))_0 = 0$ i dowodzona nierówność jest trywialnie spełniona.

Wobec Lematu 3.3 z udowodnionych nierówności wynika

$$\sum_{P\in\mathbb{C}^2} (f,g)_P \le n^2 - 2\,\mathrm{pole}\,\Delta_I - 2\,\mathrm{pole}\,\Delta_{II} \tag{2}$$

i stąd, ponieważ suma pól wielokątów Δ_∞, Δ_I i Δ_{II} wynosi $n^2/2$ (por. Uwaga 2.2), otrzymujemy

$$\sum_{P\in\mathbb{C}^2} (f,g)_P \le 2 \text{ pole } \Delta_\infty \tag{3}$$

Jeżeli para (f,g) jest niezdegenerowana w nieskończoności, to na mocy lematu 3.4 (p.(2)) i twierdzenia 1.1 stwierdzamy, że nierówności (1) można zastąpić równościami. Ponadto zauważmy, że wtedy "Nierówność Bezouta" staje się równością (lemat 3.4, p.(1)). Stąd wynika, że jeżeli para (f,g) jest niezdegenerowana w nieskończoności, to w (2) więc i w (3) mamy równość.

Przedstawione powyżej rozumowanie pozwla wysnuć następujący wniosek:

Przy założeniach twierdzenia 3.1 i wprowadzonych oznaczeniach: suma krotności przecięcia w punktach leżących na prostej w nieskończoności $\{(x:y:z)\in\mathbb{P}^2 : z=0\}$ domknięć rzutowych krzywych afinicznych $f(X,Y)=0$, $g(X,Y)=0$ jest większa lub równa od $2(\mathrm{pole}\,\Delta_I + \mathrm{pole}\,\Delta_{II})$. Jeżeli para (f,g) jest niezdegenerowana w nieskończości to zachodzi równość.

SPIS LITERATURY

[A] L. A. Ajzenberg, A. P. Južakov, Integral'nye predstavlenija i vyčety v mnogomernom kompleksnom analize (1991), Izdat. Nauka,, Sibirskoe Otdelenie, Novosibirsk.

[B] o D. N. Bernštejn,, *Čislo kornej sistemy uravnenij*, Funkcional'nyj analiz i ego priloženija, **9(3)** (1975)), 1–4.

[F] W. Fulton, *Algebraic curves*, W. A. Benjamin, Inc., 1969.

[K1] A. G. Kušnirenko, *Mnogogrannik N'jutona i čislo rešenij sistemy k urovnienij s k nieizvestnymi*, UMN XXX **2** (1975), 266–267.

[K2] A. G. Kušnirenko, *Mnogogrannik N'jutona i čisla Milnora*, Funkcional'nyj analiz i ego priloženija, **9(1)** (1975), 74–75.

[K3] A. G. Kouchnirenko, *Polyédres de Newton et nombers de Milnor*, Inv. Math. **32(1)** (1976), 1–32.

[P] A. Płoski, *Newton polygons and the Łojasiewicz exponent of a holomorphic mapping of* $\mathbb{C}^2$, Ann. Polon. Math. **I** (1990), 275–281.

The Newton diagrams of plane algebraic curves.

Summary. We give the description of the Newton diagram of a plane curve in terms of the local diagrams. As application we get the elementary proofs of Kouchnirenko's theorems on intersection multiplicities and the Milnor number.