

O DYSTANSIE LOGARYTMICZNYM
MIĘDZY GAŁĘZIAMI

Andrzej Lenarcik (Kielce)

Przez gałąź rozumiemy kulek nierozkładalny zespolonej krzywej płaskiej. Krotność przecięcia dwóch gałęzi podzielona przez iloczyn ich krotności spełnia aksjomaty dystansu logarytmicznego [9]. Kule zdefiniowane za pomocą tego dystansu posiadają własności analogiczne do własności kul w przestrzeniach ultrametrycznych. W niniejszej pracy dla dowolnie ustalonej gałęzi konstruujemy efektywnie nową gałąź realizującą względem tej pierwszej dystans logarytmiczny równy dowolnej z góry zadanej liczbie wymiernej większej lub równej jeden. Ten podstawowy fakt został udowodniony w pracy [1]. Pozwala on np. wykazać, że z równości kul wynika równość ich średnic.

1. WSTĘP

Niech $\mathbb{C}\{X, Y\}$ będzie pierścieniem szeregów zbieżnych dwóch zmiennych nad \mathbb{C} . Dla niezerowego szeregu $f = \sum c_{\alpha\beta} X^\alpha Y^\beta \in \mathbb{C}\{X, Y\}$ definiujemy *rzęd* $\text{ord } f$ jako najmniejsze możliwe $\alpha + \beta$ odpowiadające niezerowym współczynnikom $c_{\alpha\beta}$ oraz formę początkową $\text{in } f = \sum c_{\alpha\beta} X^\alpha Y^\beta$, gdzie sumowanie przebiega po (α, β) realizujących rzęd. Przyjmujemy konwencję $\text{ord } 0 = \infty$. Mówimy, że f jest *osobliwy* jeżeli $2 \leq \text{ord } f < \infty$, *nieosobliwy* jeżeli $\text{ord } f = 1$, oraz że jest *jednością*, gdy $\text{ord } f = 0$. Szereg f nazywamy *zredukowanym*, jeżeli nie ma czynników wielokrotnych. Przez *gałąź* rozumiemy szereg nierozkładalny w $\mathbb{C}\{X, Y\}$.

Dla dowolnych $f, g \in \mathbb{C}\{X, Y\}$ *krotnością przecięcia* $(f, g)_0$ nazywamy \mathbb{C} -kowymiar ideału generowanego przez f i g w $\mathbb{C}\{X, Y\}$. Mamy

$$(1) \quad (f, g)_0 \geq (\text{ord } f)(\text{ord } g).$$

Dla $f, g \in \mathbb{C}\{X, Y\}$ o skończonych dodatnich rzędach równość zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy układ $\text{in } f = \text{in } g = 0$ nie ma rozwiązań w $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$. Mówimy wówczas, że f i g są *transwersalne*. W przeciwnym razie mówimy, że f i g są *styczne*.

Niech $f \in \mathbb{C}\{X, Y\}$ będzie szeregiem zredukowanym dodatniego skończonego rzędu. Szereg f definiuje kielik krzywej $f = 0$ w $0 \in \mathbb{C}^2$. Rozszerzamy pojęcia: osobliwy (nieosobliwy, gałąź) na kielki oraz pojęcia: transwersalność (styczność) na pary kielków.

Płoski [9] pokazał, że *rzęd kontakt*

$$(2) \quad d(f, g) = \frac{(f, g)_0}{(\text{ord } f)(\text{ord } g)}$$

zdefiniowany dla gałęzi $f, g \in \mathbb{C}\{X, Y\}$ spełnia aksjomaty dystansu logarytmicznego (patrz także Lemat 7.3). Z (1) mamy $d(f, g) \geq 1$.

Głównym rezultatem, który chcemy zaprezentować w tym artykule jest następujące

Twierdzenie 1.1. (see [1], Theorem 2.7)

Dla dowolnej gałęzi f oraz dla dowolnego wymiernego $R \geq 1$ istnieje gałąź g taka, że $d(f, g) = R$.

Dowód twierdzenia podajemy w Rozdziale 8.

2. PRELIMINARIA

Stosujemy konwencje $\sum_{\emptyset} = 0$ i $\prod_{\emptyset} = 1$. Symbol $\#$ oznacza liczbę elementów zbioru. Przez $U(m) \subset \mathbb{C}$ (m całkowite dodatnie) oznaczamy grupę pierwiastków z jedynki stopnia m .

Aby radzić sobie z pierwiastkami wielokrotnymi, stosujemy pojęcie *potęgi symetrycznej* [12]. Dla elementów a_1, \dots, a_s danego zbioru definiujemy *system* $\mathbf{A} = \langle a_1, \dots, a_s \rangle$ jako ciąg a_1, \dots, a_s traktowany, jako nieuporządkowany. Oznaczamy $\text{deg } \mathbf{A} = s$. Dla $\mathbf{A} = \langle a_1, \dots, a_s \rangle$ i $\mathbf{B} = \langle b_1, \dots, b_t \rangle$ wprowadzamy dodawanie $\mathbf{A} \oplus \mathbf{B} = \langle a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_t \rangle$ z elementem neutralnym $\langle \rangle$ (*system pusty*). Zamiast $\underbrace{\langle a, \dots, a \rangle}_{m \text{ razy}}$ piszemy $\langle a : m \rangle$ z konwencją $\langle a : 0 \rangle = \langle \rangle$. Jeżeli a występuje w \mathbf{A} co najmniej jeden raz, to piszemy $a \in \mathbf{A}$.

Rozważamy pierścień $\mathbb{C}\{X\}^* = \bigcup_{N \geq 1} \mathbb{C}\{X^{1/N}\}$ *szeregów Puiseux*. Dla każdego niezerowego szeregu $y \in \mathbb{C}\{X\}^*$ przez *rzęd* $\text{ord } y$ rozumiemy minimalny wykładnik występujący przy niezerowym współczynniku oraz przez $\text{in } y$ oznaczamy odpowiedni jednomian. Przymujemy $\text{ord } 0 = \infty$ oraz $\text{in } 0 = 0$. Dla systemów $\mathbf{A} = \langle y_1, \dots, y_s \rangle$ oraz $\mathbf{B} = \langle z_1, \dots, z_t \rangle$ szeregów Puiseux definiujemy *wykładnik kontaktu*

$$(3) \quad z(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \max_{i,j} \text{ord}(y_i - z_j).$$

Wykładnik ten jest nieujemną liczbą wymierną lub jest równy ∞ .

Mówimy, że $\sum_i y_i$, $y_i \in \mathbb{C}\{X\}^*$, ma *sens algebraiczny* [3], gdy dla dowolnego $M > 0$ zbiór $\{i : \text{ord } y_i < M\}$ jest skończony. Wówczas $\sum_i y_i$ oraz $\min_i \text{ord } y_i$ są dobrze określone oraz

$$(4) \quad \text{ord} \sum_i y_i \geq \min_i \text{ord } y_i .$$

Nierówność (4) jest ostra wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są oba warunki: (I) istnieją co najmniej dwa szeregi realizujące minimalny rząd; (II) suma form początkowych szeregów realizujących minimalny rząd jest równa zero.

3. DIAGRAM NEWTONA I PIERWIASTKI NEWTONA-PUISEUX

Korzystnie jest rozważać pierścień $\mathbb{C}\{X^*, Y\} = \bigcup_{N \geq 1} \mathbb{C}\{X^{1/N}, Y\}$. Niech $f = \sum c_{\alpha\beta} X^\alpha Y^\beta \in \mathbb{C}\{X^*, Y\}$. Jak zwykle definiujemy *nośnik* $\text{supp } f$ jako $\{(\alpha, \beta) : c_{\alpha\beta} \neq 0\}$, *diagram Newtona* $\Delta_f = \Delta(f)$ jako otoczkę wypukłą zbioru $\text{supp } f + \mathbb{R}_+^2$ oraz *lamaną Newtona* $\mathcal{N}_f = \mathcal{N}(f)$ jako zbiór zwartych krawędzi (jednowymiarowych ścian) diagramu $\Delta(f)$. Dla $f, g \in \mathbb{C}\{X^*, Y\}$ mamy $\Delta(fg) = \Delta(f) + \Delta(g)$ (własność iloczynowa). Przez $\delta_Y(f)$ (odpowiednio: $\delta_X(f)$) oznaczamy odległość pomiędzy $\Delta(f)$ i osią poziomą (odpowiednio: osią pionową)¹. Dla $S \in \mathcal{N}_f$, przez $|S|_1$ i $|S|_2$ oznaczamy długości rzutów odcinka S odpowiednio na oś poziomą i pionową. Stosunek $|S|_1/|S|_2$ nazywamy *inklinacją* odcinka S . Definiujemy *formę początkową* f względem S jako $\text{in}(f, S) = \sum c_{\alpha\beta} X^\alpha Y^\beta$, gdzie $(\alpha, \beta) \in S \cap \text{supp } f$. Formę $\text{in}(f, S)^\circ$ definiujemy za pomocą równania $\text{in}(f, S) = X^{a_S} Y^{b_S} \text{in}(f, S)^\circ$, gdzie wykładniki a_S i b_S są największe z możliwych.

Niech $f = \sum c_{\alpha\beta} X^\alpha Y^\beta \in \mathbb{C}\{X^*, Y\}$ i niech $\mathbf{v} = (a, b)$ będzie wektorem $(a, b > 0)$. Definiujemy $\text{ord}_{\mathbf{v}} f = \min\{a\alpha + b\beta : (\alpha, \beta) \in \text{supp } f\}$ i $\text{in}_{\mathbf{v}} f = \sum c_{\alpha\beta} X^\alpha Y^\beta$, gdzie sumowanie przebiega po $(\alpha, \beta) \in \text{supp } f$ takich, że $a\alpha + b\beta = \text{ord}_{\mathbf{v}} f$. Kładziemy $\text{ord}_{\mathbf{v}} 0 = \infty$ oraz $\text{in}_{\mathbf{v}} 0 = 0$. Dla $f, g \in \mathbb{C}\{X^*, Y\}$ mamy $\text{ord}_{\mathbf{v}}(fg) = \text{ord}_{\mathbf{v}} f + \text{ord}_{\mathbf{v}} g$ i $\text{in}_{\mathbf{v}}(fg) = (\text{in}_{\mathbf{v}} f)(\text{in}_{\mathbf{v}} g)$. Jeżeli $\mathbf{v} = (1, 1)$, to $\text{ord}_{\mathbf{v}} f = \text{ord } f$ and $\text{in}_{\mathbf{v}} f = \text{in } f$. Niech teraz $y \in \mathbb{C}\{X\}^*$, $\text{ord } y > 0$. Chcemy zdefiniować $f(X, y(X)) \in \mathbb{C}\{X\}^*$. Jeżeli $y = 0$, to jest to $f(X, 0) \in \mathbb{C}\{X\}^*$. Jeżeli $y \neq 0$, to $0 < \text{ord } y < \infty$. Definiujemy $f(X, y(X))$ jako $\sum f_{\alpha\beta}$, gdzie $f_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta} X^\alpha y(X)^\beta \in \mathbb{C}\{X\}^*$, $(\alpha, \beta) \in \text{supp } f$. Ponieważ $\text{ord } f_{\alpha\beta} = \alpha + \beta \text{ord } y$ i $\text{ord } y > 0$, dlatego $f(X, y(X))$ ma sens algebraiczny. Na podstawie (4) mamy

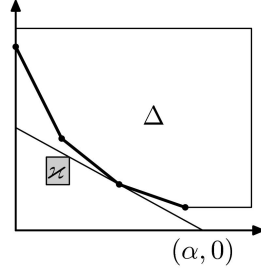
$$(5) \quad \text{ord } f(X, y(X)) \geq \min_{(\alpha, \beta) \in \text{supp } f} \text{ord } f_{\alpha\beta} = \text{ord}_{\mathbf{v}} f ,$$

gdzie $\mathbf{v} = (1, \text{ord } y)$. Wniosujemy, że nierówność w (5) jest ostra wtedy i tylko wtedy, gdy oba warunki są spełnione: (I) $\text{in}_{\mathbf{v}} f$ nie jest jednomianem; (II) $\text{in}_{\mathbf{v}} f(X, \text{in } y) = 0$. Zauważmy, że warunek (I) jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{ord } y$ występuje jako inklinacja jednego z odcinków $S \in \mathcal{N}_f$. Wówczas $\text{in}_{\mathbf{v}} f = \text{in}(f, S)$.

¹Ponieważ $f \in \mathbb{C}\{X^*, Y\}$, dlatego $\delta_X(f)$ może nie być całkowite.

Dla diagramu Newtona Δ i dla $\varkappa > 0$ definiujemy liczbę $\alpha = \alpha(\varkappa, \Delta)$, jako odciętą punktu przecięcia prostej o inklinacji $\varkappa > 0$, podpierającej Δ , z osią poziomą. Jeżeli $\Delta = \Delta_f$, $f \in \mathbb{C}\{X^*, Y\}$, to

$$\alpha(\varkappa, \Delta) = \text{ord}_{\mathbf{v}} f \quad \text{dla } \mathbf{v} = (1, \varkappa).$$



Ponadto, jeżeli Δ ma wierzchołek $(p, 0)$, to przyjmujemy $\alpha(\infty, \Delta) = p$ lub jeżeli Δ nie dotyka osi poziomej, to przyjmujemy $\alpha(\infty, \Delta) = \infty$. Z tą notacją możemy zreagować (5) w następujący sposób (dopuszczający $y = 0$)

$$(6) \quad \text{ord } f(X, y(X)) \geq \alpha(\text{ord } y, \Delta_f).$$

Nierówność (6) jest ostra wtedy i tylko wtedy, gdy oba warunki są spełnione: (I) istnieje $S \in \mathcal{N}_f$ taki, że $|S|_1/|S|_2 = \text{ord } y$; (II) $\text{in}(f, S)(X, \text{in } y) = 0$.

Niech $f(X, Y) \in \mathbb{C}\{X^*, Y\}$ będzie szeregiem niezerowym. Mówimy, że $y \in \mathbb{C}\{X\}^*$ jest *pierwiastkiem Puiseux* równania $f = 0$ w $\mathbb{C}\{X\}^*$, gdy $\text{ord } y > 0$ oraz $f(X, y(X)) = 0$ w $\mathbb{C}\{X\}^*$. Przez $\text{Zer } f = \langle y_1, \dots, y_s \rangle$ oznaczamy system wszystkich pierwiastków równania $f = 0$ w $\mathbb{C}\{X\}^*$ ([6], [13]). Stosując Twierdzenie Przygotowawcze oraz Twierdzenie Bézouta możemy zapisać f w postaci

$$(7) \quad f(X, Y) = X^{\delta_X(f)} u(X, Y) \prod_{i=1}^s (Y - y_i(X)),$$

gdzie $u(X, Y) \in \mathbb{C}\{X, Y\}$ jest jednością. Wyczerpująca informacja o rzędach rozwiązań $\text{Zer } f$ oraz o ich formach początkowych może być odczytana z diagramu Newtona $\Delta(f)$ oraz z form początkowych szeregu f względem odcinków $S \in \mathcal{N}_f$. Klasyczne twierdzenie Newtona-Puiseux może być zreagowane w następującej postaci.

Twierdzenie 3.1. (Newton-Puiseux)

Niech $\text{Zer } f = \langle y_1(X), \dots, y_s(X) \rangle$. Wówczas

- (i) $s = \sum_{S \in \mathcal{N}(f)} |S|_2 + \delta_Y(f)$,
- (ii) $\langle \text{ord } y_1(X), \dots, \text{ord } y_s(X) \rangle = \bigoplus_{S \in \mathcal{N}(f)} \langle |S|_1/|S|_2 : |S|_2 \rangle \oplus \langle \infty : \delta_Y(f) \rangle$,
- (iii) $\langle \text{in } y_1(X), \dots, \text{in } y_s(X) \rangle = \bigoplus_{S \in \mathcal{N}(f)} \text{Zer } \text{in}(f, S)^\circ \oplus \langle 0 : \delta_Y(f) \rangle$.

Dowód. Teissier zaproponował wygodną notację. Niech $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, dla $A, B \subset \mathbb{R}_+^2$ $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$, $\left\{\frac{a}{b}\right\} =$ otoczka wypukła $\{(a, 0), (0, b)\} + \mathbb{R}_+^2$ ($\left\{\frac{0}{0}\right\}$ jest elementem neutralnym). Ponadto $\left\{\frac{1}{\infty}\right\} = (1, 0) + \mathbb{R}_+^2$ oraz $\left\{\frac{\infty}{1}\right\} = (0, 1) + \mathbb{R}_+^2$. Jeżeli $\left\{\frac{k}{\infty}\right\} + \sum_{i=1}^s \left\{\frac{a_i}{1}\right\} = \left\{\frac{k'}{\infty}\right\} + \sum_{i=1}^{s'} \left\{\frac{a'_i}{1}\right\}$, to $k = k'$, $s = s'$ oraz $\langle a_1, \dots, a_s \rangle = \langle a'_1, \dots, a'_{s'} \rangle$ (jednoznaczność). Stosując własność iloczynową diagramu Newtona do obu stron (7) otrzymujemy $\Delta(f) = \left\{\frac{\delta_X(f)}{\infty}\right\} + \sum_{i=1}^s \left\{\frac{\text{ord} y_i}{1}\right\}$. Z drugiej strony $\Delta(f) = \left\{\frac{\delta_X(f)}{\infty}\right\} + \sum_{S \in \mathcal{N}_f} \sum_{i=1}^{|S|_2} \left\{\frac{|S|_1/|S|_2}{1}\right\}$. Z jednoznaczności otrzymujemy (ii). Część (i) wynika z (ii). Dla dowodu (iii) wybierzmy $S \in \mathcal{N}_f$ i oznaczmy $I_S = \{i \in \{1, \dots, s\} : \text{ord} y_i = |S|_1/|S|_2\}$, $I'_S = \{i \in \{1, \dots, s\} : \text{ord} y_i > |S|_1/|S|_2\}$, $I''_S = \{i \in \{1, \dots, s\} : \text{ord} y_i < |S|_1/|S|_2\}$. Wystarczy pokazać, że $\text{in}(f, S)^\circ = \prod_{i \in I_S} (Y - \text{in} y_i)$ z dokładnością do niezerowej stałej. Zastosujmy $\text{in}_\mathbf{v}$ przyjmując $\mathbf{v} = (1, |S|_1/|S|_2)$ do obu stron (7). Otrzymamy

$$\text{in}(f, S) = (\text{in}_\mathbf{v} X)^{\delta_X(f)} \text{in}_\mathbf{v} u(X, Y) \prod_{i=1}^s \text{in}_\mathbf{v} (Y - y_i).$$

Mamy $\text{in}_\mathbf{v} X = X$, $\text{in}_\mathbf{v} u(X, Y) = u(0, 0)$ oraz

$$\text{in}_\mathbf{v} (Y - y_i) = \begin{cases} Y & \text{gdy } \text{ord} y_i > |S|_1/|S|_2 \\ Y - \text{in} y_i & \text{gdy } \text{ord} y_i = |S|_1/|S|_2 \\ -\text{in} y_i & \text{gdy } \text{ord} y_i < |S|_1/|S|_2 \end{cases}.$$

Zatem

$$\text{in}(f, S) = u(0, 0)(-1)^b Y^a X^{\delta_X(f)+c} \prod_{i \in I_S} (Y - \text{in} y_i)$$

gdzie $a = \#I'_S$, $b = \#I''_S$ oraz $c = \sum_{i \in I''_S} \text{ord} y_i$. Dzieląc przez X i Y w maksymalnych potęgach otrzymamy żadaną równość ■

Zwróćmy jeszcze uwagę na następujący fakt (patrz np. [11]). Niech $f, g \in \mathbb{C}\{X, Y\}$ będą niezerowymi szeregami dodatniego rzędu i niech \mathbf{v} będzie wektorem o dodatnich składowych. Wówczas

$$(8) \quad (f, g)_0 \geq \frac{(\text{ord}_\mathbf{v} f)(\text{ord}_\mathbf{v} g)}{(\text{ord}_\mathbf{v} X)(\text{ord}_\mathbf{v} Y)}$$

z równością wtedy i tylko wtedy, gdy układ $\text{in}_\mathbf{v} f = \text{in}_\mathbf{v} g = 0$ nie ma rozwiązań w $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$. Dla $\mathbf{v} = (1, 1)$ otrzymujemy (1).

4. WYKŁADNIKI CHARAKTERYSTYCZNE SZEREGU PUISEUX

Niech v_0 będzie dodatnią liczbą całkowitą. Rozważmy szereg $y \in \mathbb{C}\{X^{1/v_0}\}$ dodatniego rzędu. Dla niezerowego y możemy napisać

$$(9) \quad y = a_1 X^{v_1/v_0} + a_2 X^{v_2/v_0} + \dots, \quad a_1, a_2, \dots \neq 0,$$

$0 < v_1 < v_2 < \dots$ całkowite. Liczba niezerowych wyrazów szeregu jest skończona lub nieskończona. Przyporządkowujemy do y ciąg (v_0, v_1, v_2, \dots) , który będziemy nazywać ciągiem *stowarzyszonym* z y . Dla $y = 0$ jest nim (v_0) .

Uwaga 4.1. Jeżeli dwa ciągi są stowarzyszone z tym samym szeregiem Puiseux, to są one proporcjonalne. Rozważmy wszystkie możliwe ciągi stowarzyszone z danym szeregiem Puiseux. W zbiorze tym istnieje jedyny ciąg o wyrazach względnie pierwszych. Możemy otrzymać ten ciąg z dowolnego ciągu stowarzyszonego przez podzielenie każdego wyrazu przez największy wspólny dzielnik wszystkich wyrazów.

Definicja 4.2. (sprzężenia – “conjugates”)

Niech $y \in \mathbb{C}\{X^{1/v_0}\}$, $\text{ord } y > 0$. Definiujemy system sprzężeń $\text{conj}_{v_0} y$ dla y w $\mathbb{C}\{X^{1/v_0}\}$. Jeżeli $y = 0$, to kładziemy $\text{conj}_{v_0} y = \langle 0 : v_0 \rangle$. Jeżeli $y \neq 0$, to wybieramy pierwiastek pierwotny $\varepsilon \in U(v_0)$ oraz podstawiamy $X^{1/v_0} := \varepsilon^i X^{1/v_0}$ ($i = 0, \dots, v_0 - 1$) w (9). Otrzymujemy

$$(10) \quad y_i(X) = a_1 \varepsilon^{v_1 i} X^{v_1/v_0} + a_2 \varepsilon^{v_2 i} X^{v_2/v_0} + \dots, \quad i = 0, \dots, v_0 - 1.$$

Kładziemy $\text{conj}_{v_0} y = \langle y_0, \dots, y_{v_0-1} \rangle$.

Poniższa własność jest przydatna do badania rzędów różnic pomiędzy szeregiem (9) i jego sprzężeniami (10). Połóżmy $I_0 = \{0, \dots, v_0 - 1\}$ oraz $I_j = \{i \in I_0 : \text{ord}(y_i - y_0) > v_j/v_0\}$, ($j = 1, 2, \dots$).

Własność 4.3.

- (a) $I_0 = \bigcup_j (I_{j-1} \setminus I_j) \cup \bigcap_j I_j$,
- (b) $\text{ord}(y_i - y_0) = v_j/v_0 \Leftrightarrow i \in I_{j-1} \setminus I_j$,
- (c) $\text{ord}(y_i - y_0) = \infty \Leftrightarrow i \in \bigcap_j I_j$,
- (d) $\#(I_{j-1} \setminus I_j) = \text{GCD}(v_0, v_1, \dots, v_{j-1}) - \text{GCD}(v_0, v_1, \dots, v_j)$,
- (e) $\#\bigcap_j I_j = \text{GCD}(v_0, v_1, v_2, \dots)$.

Dowód. Formuła w (a) wynika z ciągu inkluzji $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$, (b) i (c) są jasne. Części (d) i (e) wynikają z faktu, że $I_j = \{i \in I_0 : v_1 i \equiv 0 \pmod{v_0}, \dots, v_j i \equiv 0 \pmod{v_0}\}$ oraz $\#I_j = \text{GCD}(v_0, \dots, v_j)$ ■

Chcemy wyznaczyć zbiór różnych sprzężeń w $\text{conj}_{v_0} y$.

Własność 4.4. Niech $y \in \mathbb{C}\{X^{1/v_0}\}$, $\text{ord } y > 0$, z ciągiem stowarzyszonym (v_0, v_1, v_2, \dots) .

- (i) Każdy szereg w $\text{conj}_{v_0} y$ występuje $\text{GCD}(v_0, v_1, v_2, \dots)$ razy.
- (ii) W $\text{conj}_{v_0} y$ występuje $v_0/\text{GCD}(v_0, v_1, v_2, \dots)$ różnych sprzężeń.
- (iii) Zbiór różnych sprzężeń szeregu y w $\text{conj}_{v_0} y$ nie zależy od wyboru ciągu stowarzyszonego.

Dowód. Dla $y = 0$ części (i–iii) wynikają bezpośrednio z definicji. Załóżmy, że $y \neq 0$. Bez utraty ogólności sprawdzamy (i) dla $y(X) = y_0(X)$. Korzystamy z Własności 4.3(c) i (e). Część (ii) wynika z (i). Do dowodu (iii) wykorzystujemy następującą łatwą

Własność 4.5. Niech m, l będą dodatnimi liczbami całkowitymi.

- (1) Jeżeli $\{\tau_0, \dots, \tau_{m-1}\} = U(m)$, to $\{\tau_0^l, \dots, \tau_{m-1}^l\} = U(m/\text{GCD}(m, l))$.
- (2) Jeżeli $\tau \in U(m)$ jest pierwiastkiem pierwotnym, to $\tau^l \in U(m/\text{GCD}(m, l))$ jest także pierwiastkiem pierwotnym.

Zapiszmy y w postaci (9). Rozważmy $v_0/\text{GCD}(v_0, v_1, v_2, \dots)$ pierwszych sprzężeń określonych formułą (10). Twierdzimy, że są one różne. Aby to sprawdzić, rozważmy ciąg stowarzyszony $(v'_0, v'_1, v'_2, \dots)$ o względnie pierwszych wyrazach taki, jak w Uwadze 4.1. Niech $w = \text{GCD}(v_0, v_1, v_2, \dots)$. Wówczas $v'_j = v_j/w$ dla $j = 0, 1, 2, \dots$. Z Własności 4.5(2) $\varepsilon' := \varepsilon^w$ jest pierwiastkiem pierwotnym z jedynki rzędu v'_0 . Możemy napisać

$$(11) \quad y_i(X) = a_1(\varepsilon')^{v'_1 i} X^{v'_1/v'_0} + a_2(\varepsilon')^{v'_2 i} X^{v'_2/v'_0} + \dots, \quad i = 0, \dots, v'_0 - 1.$$

Ponieważ $\text{GCD}(v'_0, v'_1, v'_2, \dots) = 1$, więc z (ii) mamy tutaj v'_0 różnych sprzężeń. Z (11) wynika, że zbiór różnych sprzężeń szeregu y w $\text{conj}_{v_0} y$ nie zależy od v_0 ■

Definicja 4.6. (cykl)

Niech $y \in \mathbb{C}\{X\}^*$, $\text{ord } y > 0$ oraz niech (v_0, v_1, v_2, \dots) będzie ciągiem stowarzyszonym z y . Z Własności 4.4 wynika, że y ma $v_0/\text{GCD}(v_0, v_1, v_2, \dots)$ różnych sprzężeń, niezależnych od wyboru ciągu stowarzyszonego. *Cyklem* szeregu y (oznaczenie $\text{cycle } y$) nazywamy system (zbiór) różnych sprzężeń szeregu y .

Niech $y \in \mathbb{C}\{X\}^*$. Definiujemy $N = N(y)$ jako minimalne możliwe N takie, że $y \in \mathbb{C}\{X^{1/N}\}$.

Wniosek 4.7. Niech $y \in \mathbb{C}\{X\}^*$, $\text{ord } y > 0$ i niech (v_0, v_1, v_2, \dots) będzie ciągiem stowarzyszonym z y . Wówczas $N(y) = v_0/\text{GCD}(v_0, v_1, v_2, \dots)$.

Dowód. Niech $v'_0 = v_0/\text{GCD}(v_0, v_1, v_2, \dots)$. Oczywiście $y \in \mathbb{C}\{X^{1/v'_0}\}$. Dlatego $v'_0 \geq N(y)$. Załóżmy, że $y \in \mathbb{C}\{X^{1/M}\}$. Z Własności 4.4 v'_0 jest równe liczbie różnych sprzężeń szeregu y oraz v'_0 dzieli M . Zatem $v'_0 \leq N(y)$ ■

Definicja 4.8. (wykładnik charakterystyczny)

Niech $y \in \mathbb{C}\{X\}^*$, $\text{ord } y > 0$. Dodatnia liczba wymierna nazywana jest wykładnikiem charakterystycznym szeregu y jeżeli występuje jako rząd różnicy pomiędzy y i jego sprzężeniem.

Własność 4.9. Niech $y \in \mathbb{C}\{X\}^*$, $\text{ord } y > 0$ i niech (v_0, v_1, v_2, \dots) będzie ciągiem stowarzyszonym z y .

(I) Liczba v_j/v_0 ($j = 1, 2, \dots$) jest wykładnikiem charakterystycznym szeregu y wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(12) \quad \text{GCD}(v_0, \dots, v_{j-1}) > \text{GCD}(v_0, \dots, v_j).$$

(II) Liczba wykładników charakterystycznych szeregu y jest ograniczona przez $N(y) - 1$.

(III) Szereg y ma co najmniej jeden wykładnik charakterystyczny wtedy i tylko wtedy, gdy $N(y) > 1$.

Dowód. Do dowodu (I) stosujemy Własność 4.3(b) i (d). W dowodzie (II) i (III) możemy założyć, że $\text{GCD}(v_0, v_1, v_2, \dots) = 1$. Wówczas $v_0 = N(y)$. Obie części wynikają z równości $N(y) - 1 = \sum_j (\text{GCD}(v_0, \dots, v_{j-1}) - \text{GCD}(v_0, \dots, v_j))$ ■

Definicja 4.10. (charakterystyka szeregu Puiseux)

Niech $y \in \mathbb{C}\{X\}^*$ będzie jak we Własności 4.9. Przez *pozycję charakterystyczną* szeregu y rozumiemy liczbę $j \in \{1, 2, \dots\}$ spełniającą (12). Przez $\mathbf{h} = \mathbf{h}(y)$ oznaczamy liczbę wykładników (pozycji) charakterystycznych szeregu y . Niech $j_1 < \dots < j_{\mathbf{h}}$ będą pozycjami charakterystycznymi. Definiujemy *charakterystykę* szeregu y jako $(b_0, \dots, b_{\mathbf{h}}) = (N(y), v'_{j_1}, \dots, v'_{j_{\mathbf{h}}})$, gdzie $v'_{j_k} = v_{j_k}/\text{GCD}(v_0, v_1, \dots)$, $k = 1, \dots, \mathbf{h}$. Jeżeli $N(y) = 1$ ($\Leftrightarrow \mathbf{h} = 0$), to $(b_0, \dots, b_{\mathbf{h}}) = (1)$. Jasne jest, że jeżeli $\mathbf{h} \geq 1$, to $b_1/b_0, \dots, b_{\mathbf{h}}/b_0$ są wykładnikami charakterystycznymi szeregu y .

Uwaga 4.11. Definicja charakterystyki $(b_0, \dots, b_{\mathbf{h}})$ nie zależy od wyboru elementu cyklu. Do charakterystyki przyporządkujemy dwa *ciągi podzielników*. *Pierwszym* jest $(e_0, \dots, e_{\mathbf{h}})$, gdzie $e_k = \text{GCD}(b_0, \dots, b_k)$ ($k = 0, \dots, \mathbf{h}$). Mamy $b_0 = e_0 > \dots > e_{\mathbf{h}} = 1$. Jeżeli $\mathbf{h} \geq 1$, to definiujemy *drugi ciąg podzielników* $(n_1, \dots, n_{\mathbf{h}})$, gdzie $n_k = e_{k-1}/e_k > 1$ ($k = 1, \dots, \mathbf{h}$).

5. CYKLE I GAŁĘZIE

Niech $y \in \mathbb{C}\{X\}^*$, $\text{ord } y > 0$ oraz niech *cykle* $y = \langle y_0, \dots, y_{N-1} \rangle$; $N = N(y)$ będzie, jak w Definicji 4.6. Niech (v_0, v_1, v_2, \dots) będzie jednoznacznym ciągiem stowarzyszonym z y spełniającym

$$(13) \quad \text{GCD}(v_0, v_1, v_2, \dots) = 1.$$

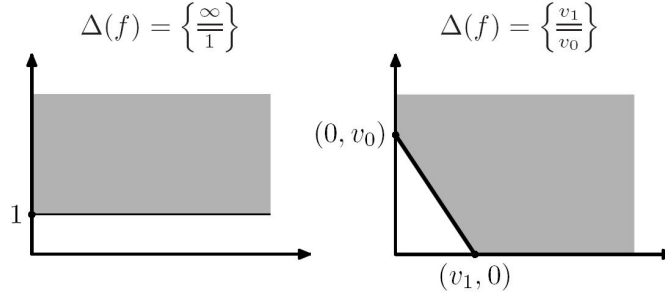
Wówczas $N(y) = v_0$ (Wniosek 4.7). Stosując standardowy argument z Teorii Galois uzasadniamy, że iloczyn

$$(14) \quad [y] := \prod_{i=0}^{N-1} (Y - y_i(X)) \in \mathbb{C}\{X, Y\}$$

definiuje gałąź w $\mathbb{C}\{X, Y\}$ ([10]). Mamy $[0] = Y$. Z drugiej strony stosując (7) dochodzimy do wniosku, że każda gałąź względnie pierwsza z X może być zapisana w postaci (14) z dokładnością do jedności w $\mathbb{C}\{X, Y\}$. Niech $f = [y]$. Mamy $\text{Zer } f = \langle y_0, \dots, y_{N-1} \rangle$ oraz

$$(15) \quad N = N(y) = (f, X)_0.$$

Rozważmy diagram Newtona $\Delta(f)$. Jeżeli $f = Y = [0]$, to $\Delta(f) = \left\{ \frac{\text{ord } 0}{1} \right\} = \left\{ \frac{\infty}{1} \right\}$ (stosujemy notację Teissiera z dowodu Twierdzenia 3.1).



Jeżeli $y \neq 0$, to $\text{ord } y_i = v_1/v_0$ ($i = 0, \dots, N-1$), $\Delta(f) = \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ \frac{\text{ord } y_i}{1} \right\} = \left\{ \frac{v_1}{v_0} \right\}$
oraz

$$(16) \quad (f, X)_0 = v_0, \quad (f, Y)_0 = v_1, \quad \text{ord } f = \min\{v_0, v_1\}.$$

W każdej sytuacji możemy napisać

$$(17) \quad \text{ord } y_i = (f, Y)_0 / (f, X)_0.$$

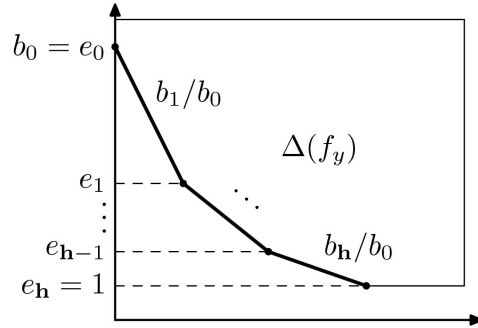
Własność 5.1. Niech $y \in \mathbb{C}\{X\}^*$, $\text{ord } y > 0$ będzie szeregiem o charakterystyce (b_0, b_1, \dots, b_h) , gdzie $h = h(y) \geq 1$. Niech $f = [y]$. Wówczas $\text{ord } f = \min\{b_0, b_1\}$.

Dowód. Niech (v_0, v_1, v_2, \dots) będzie jednoznacznym ciągiem stowarzyszonym z y spełniającym (13). W tym przypadku $b_0 = v_0$ oraz $b_1 = v_{j_1}$, gdzie j_1 jest pierwszą pozycją charakterystyczną. Zatem $b_1 \geq v_1$. Jeżeli $v_0 \leq v_1$, to z uwagi na (16) mamy $\text{ord } f = v_0 = \min\{b_0, b_1\}$. Jeżeli $v_0 > v_1$, to $v_0 > \text{GCD}(v_0, v_1)$ oraz $j_1 = 1$. Dlatego $b_1 = v_1$. Wówczas $\text{ord } f = b_1 = \min\{b_0, b_1\}$ ■

Dla niezerowego $f \in \mathbb{C}\{X, Y\}$ i dla dowolnego $y \in \mathbb{C}\{X\}^*$, $\text{ord } y > 0$ stosujemy podstawienie $f_y(X, Y) = f(X, y + Y) \in \mathbb{C}\{X^*, Y\}$ ([2], [4], [5], [7]). Następnie badamy diagram Newtona $\Delta(f_y)$. Rozważamy przypadek gałęzi f , $(f, X)_0 < \infty$, oraz pierwiastka Puiseux $y \in \text{Zer } f$. Poniżej opisujemy diagram Newtona $\Delta(f_y)$ w terminach charakterystyki szeregu y .

Własność 5.2. (see [4], Property 3.1 or [7], Section 5) Niech $y \in \mathbb{C}\{X\}^*$, $\text{ord } y > 0$ o charakterystyce (b_0, \dots, b_h) z pierwszym ciągiem dzielników (e_0, \dots, e_h) . Niech $f = [y]$, jak w (14). Wówczas

$$\Delta(f_y) = \sum_{k=1}^h \left\{ \frac{(b_k/b_0)(e_{k-1} - e_k)}{e_{k-1} - e_k} \right\} + \left\{ \frac{\infty}{1} \right\}.$$



Dowód. Niech (v_0, v_1, v_2, \dots) będzie jednoznacznym ciągiem stowarzyszonym z $y = y_0$. Mamy $\text{Zer } f = \text{cycle } y = \langle y_0, \dots, y_{N-1} \rangle$, gdzie y_i są zdefiniowane formułą (10) ($i = 0, \dots, N-1$). Oczywiście $\text{Zer } f_y = \langle y_0 - y_0, \dots, y_{N-1} - y_0 \rangle$ oraz

$\Delta(f_y) = \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ \frac{\text{ord}(y_i - y_0)}{1} \right\}$. Definiujemy $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$, jak wcześniej (Własność 4.3). Stosując tę własność otrzymujemy

$$\Delta(f_y) = \sum_j \left\{ \frac{(v_j/v_0)(\text{GCD}(v_0, \dots, v_{j-1}) - \text{GCD}(v_0, \dots, v_j))}{\text{GCD}(v_0, \dots, v_{j-1}) - \text{GCD}(v_0, \dots, v_j)} \right\} + \left\{ \frac{\infty}{1} \right\}.$$

Niezerowe składniki powyższej sumy odpowiadają pozycjom charakterystycznym $j_1 < \dots < j_h$. Dlatego inklinacje zwartych krawędzi diagramu $\Delta(f_y)$ pokrywają się z wykładnikami charakterystycznymi. Kończymy stosując równości $\text{GCD}(v_0, \dots, v_{j_k}) = \text{GCD}(b_0, \dots, b_k) = e_k$ oraz $\text{GCD}(v_0, \dots, v_{j_k-1}) = \text{GCD}(b_0, \dots, b_{k-1}) = e_{k-1}$ dla $k = 1, \dots, h$ ■

6. WYKŁADNIK KONTAKTU

Niech $\mathbb{C}[X]^* := \bigcup_{N \geq 1} \mathbb{C}[X^{1/N}]$ będzie zbiorem *wielomianów Puiseux* ($\deg 0 = -\infty$). Niech $y \in \mathbb{C}\{X\}^*$, $\text{ord } y > 0$ oraz niech $\theta > 0$ będzie liczbą wymierną. Definiujemy *ucięcie* $y_\theta \in \mathbb{C}\{X\}^*$ szeregu y względem θ jako sumę wszystkich wyrazów y o rzędzie ostro mniejszym od θ (dopuszczamy $y_\theta = 0$). Mówimy, że $y = \varphi + aX^\theta + \dots$ jest θ -zapisem szeregu y , jeżeli $\varphi = y_\theta$ oraz a jest współczynnikiem przy X^θ w y ($a = 0$ gdy wykładnik θ nie występuje w y); “...” oznaczają zero lub wyrazy rzędu wyższego niż θ . Niech $\varphi \in \mathbb{C}\{X\}^*$ będzie wielomianem Puiseux. Mówimy, że $y \in \mathbb{C}\{X\}^*$ jest *kontynuacją* wielomianu φ jeżeli $\text{ord}(y - \varphi) > \deg \varphi$.

Lemat 6.1. *Niech $y \in \mathbb{C}\{X\}^*$, $\text{ord } y > 0$ i niech θ będzie wykładnikiem występującym w y . Niech $y = \varphi + aX^\theta + \dots$ będzie θ -zapisem szeregu y ($a \neq 0$). Niech $N = N(\varphi)$. Niech m, n będą jednoznacznie określonymi dodatnimi liczbami całkowitymi takimi, że $\theta = m/(Nn)$ i $\text{GCD}(m, n) = 1$. Wówczas*

- (a) θ jest wykładnikiem charakterystycznym wtedy i tylko wtedy, gdy $n > 1$; wówczas n pokrywa się z odpowiednim drugim dzielnikiem.
- (b) $N(\varphi + aX^\theta) = Nn$.
- (c) Zbiór możliwych wykładników przy X^θ w tych sprzężeniach szeregu y , które są kontynuacjami φ , jest równy $\{a, a\tau, \dots, a\tau^{n-1}\}$, gdzie $\tau \in U(n)$ jest pierwiastkiem pierwotnym.

Dowód. Niech (v_0, v_1, v_2, \dots) będzie ciągiem stowarzyszonym z y . Zapiśmy y jak w formule (9), gdzie $aX^\theta = a_j X^{v_j/v_0}$ ($j \in \{1, 2, \dots\}$). Jeżeli $j = 1$, to $\varphi = 0$. W przeciwnym razie $\varphi = a_1 X^{v_1/v_0} + \dots + a_{j-1} X^{v_{j-1}/v_0}$. Niech $w = \text{GCD}(v_0, \dots, v_j)$ oraz $w' = \text{GCD}(v_0, \dots, v_{j-1})$. Ponieważ $w = \text{GCD}(w', v_j)$, więc w'/w oraz v_j/w są względnie pierwsze. Z Wniosku 4.7 $N(\varphi) = v_0/w'$. Mamy

$$\theta = \frac{v_j}{v_0} = \frac{v_j/w}{N(w'/w)}.$$

Dlatego $m = v_j/\text{GCD}(v_0, \dots, v_j)$ oraz $n = \text{GCD}(v_0, \dots, v_{j-1})/\text{GCD}(v_0, \dots, v_j)$. Teraz część (a) wynika z Własności 4.9. Jeżeli $j = j_k$ jest pozycją charakterystyczną ($k \in \{1, \dots, h\}$) oraz (b_0, \dots, b_h) jest charakterystyką szeregu y , z odpowiadającymi ciągami dzielników (e_0, \dots, e_h) oraz (n_1, \dots, n_h) , to $n = \text{GCD}(b_0, \dots, b_{k-1})/\text{GCD}(b_0, \dots, b_k) = e_{k-1}/e_k = n_k$.

Część (b) wynika wprost z Wniosku 4.7. Dla dowodu (c) rozważmy system sprzężeń $\text{conj}_{v_0} y = \langle y_0, \dots, y_{v_0-1} \rangle$, gdzie y_i jest określone formułą (10) ($i = 0, \dots, v_0-1$). Niech I_{j-1} będzie określone, jak przed Własnością 4.3. Sprawdzamy, że $I_{j-1} = \{i \in \{0, \dots, v_0-1\} : \text{ord}(y_i - \varphi) > \deg \varphi\}$. Dlatego zbiór wszystkich możliwych współczynników na j -tej pozycji tych sprzężeń szeregu y , które są kontynuacjami φ jest równy $\{a_j \varepsilon^{v_j i} : i \in I_{j-1}\}$. Wystarczy pokazać, że

$$(18) \quad \{\varepsilon^{v_j i} : i \in I_{j-1}\} = U(\text{GCD}(v_0, \dots, v_{j-1}) / \text{GCD}(v_0, \dots, v_j)).$$

Możemy traktować $I_0 = \{0, \dots, v_0-1\}$ jako grupę addytywną \mathbb{Z}_{v_0} . Wówczas I_{j-1} tworzy podgrupę \mathbb{Z}_{v_0} rzędu $\text{GCD}(v_0, \dots, v_{j-1})$. Dlatego $\{\varepsilon^i : i \in I_{j-1}\} = U(\text{GCD}(v_0, \dots, v_{j-1}))$. Kończymy korzystając z Własności 4.5 ■

Rozważmy gałęzie $f, g \in \mathbb{C}\{X, Y\}$ takie, że $(f, X)_0 = p$, $(g, X)_0 = q$ ($p, q > 0$ całkowite). Systemy pierwiastków tych gałęzi w $\mathbb{C}\{X\}^*$ tworzą cykle $\text{Zer } f = \langle y_0, \dots, y_{p-1} \rangle$ oraz $\text{Zer } g = \langle z_0, \dots, z_{q-1} \rangle$. Niech $\varkappa = \varkappa(\text{Zer } f, \text{Zer } g)$, jak w (3). Mamy $\varkappa = \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f = g$ (z dokładnością do jedności). Oznaczmy $o_f(z_j) = \varkappa(\text{Zer } f, z_j)$ dla $j = 0, \dots, q-1$. Chcemy pokazać (Wniosek 6.3), że $o_f(z_j)$ nie zależy od $j \in \{0, \dots, q-1\}$. Wynika to z następującego ogólniejszego faktu.

Własność 6.2. *System*

$$\langle \text{ord}(y_0 - z_j), \dots, \text{ord}(y_{p-1} - z_j) \rangle$$

nie zależy od $j \in \{0, \dots, q-1\}$.

Dowód. Jest jasne, że powyższy system jest taki sam jak system rzędów $\text{Zer } f(X, Y + z_j(X))$. Dzięki Twierdzeniu 3.1 wystarczy pokazać, że $\Delta f(X, Y + z_j(X))$ nie zależy od $j \in \{0, \dots, q-1\}$. Ponieważ $z_0(X) \in \mathbb{C}\{X^{1/q}\}$, możemy napisać

$$f(X, Y + z_0(X)) = f_0(X, Y) + X^{\frac{1}{q}} f_1(X, Y) + \dots + X^{\frac{q-1}{q}} f_{q-1}(X, Y),$$

gdzie $f_0, f_1, \dots, f_{q-1} \in \mathbb{C}\{X, Y\}$. Ponieważ szereg $z_j(X)$ może być otrzymany z $z_0(X)$ przez podstawienie $X^{1/q} := \varepsilon^j X^{1/q}$ ($\varepsilon \in U(q)$ pierwiastek pierwotny), dlatego

$$f(X, Y + z_j(X)) = f_0(X, Y) + \varepsilon^j X^{\frac{1}{q}} f_1(X, Y) + \dots + \varepsilon^{(q-1)j} X^{\frac{q-1}{q}} f_{q-1}(X, Y).$$

Zatem $\text{supp } f(X, Y + z_j(X))$ nie zależy od $j \in \{0, \dots, q-1\}$ ■

Wniosek 6.3. *Mamy $o_f(z_0) = \dots = o_f(z_{q-1}) = \varkappa(\text{Zer } f, \text{Zer } g)$.*

Wniosek 6.4. *Niech $f, g, h \in \mathbb{C}\{X, Y\}$ będą gałęziami względnie pierwszymi z X . Wówczas*

$$\varkappa(\text{Zer } f, \text{Zer } g) \geq \min\{\varkappa(\text{Zer } f, \text{Zer } h), \varkappa(\text{Zer } g, \text{Zer } h)\}.$$

Dowód. Niech $\text{Zer } f = \langle y_0, \dots, y_{p-1} \rangle$, $\text{Zer } g = \langle z_0, \dots, z_{q-1} \rangle$, $\text{Zer } h = \langle w_0, \dots, w_{s-1} \rangle$. Z Wniosku 6.3 dla dowolnego $w_{k_0} \in \text{Zer } h$ możemy wybrać $y_{i_0} \in \text{Zer } f$ oraz $z_{j_0} \in \text{Zer } g$ takie, że $\varkappa(\text{Zer } f, \text{Zer } h) = \text{ord}(y_{i_0} - w_{k_0})$ oraz $\varkappa(\text{Zer } g, \text{Zer } h) = \text{ord}(z_{j_0} - w_{k_0})$. Zatem

$$\begin{aligned} \varkappa(\text{Zer } f, \text{Zer } g) &\geq \text{ord}(y_{i_0} - z_{j_0}) \geq \min\{\text{ord}(y_{i_0} - w_{k_0}), \text{ord}(z_{j_0} - w_{k_0})\} \\ &= \min\{\varkappa(\text{Zer } f, \text{Zer } h), \varkappa(\text{Zer } g, \text{Zer } h)\} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Lemat 6.5. Niech $\varphi \in \mathbb{C}[X^{1/N}]$, $N = N(\varphi)$. Niech $\theta > \deg \varphi$ będzie dodatnią liczbą wymierną. Istnieją jedyne liczby całkowite dodatnie m, n takie, że $\theta = m/(Nn)$ i $\text{GCD}(n, m) = 1$. Rozważmy szeregi Puiseux $y(X) = \varphi + aX^\theta + \dots$, $z(X) = \varphi + bX^\theta + \dots$, $a, b \in \mathbb{C}$. Połóżmy $f := [y]$ i $g := [z]$. Wówczas

- (i) $\varkappa(\text{Zer } f, \text{Zer } g) \geq \theta$,
- (ii) równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a^n \neq b^n$.

Dowód. Ponieważ $\text{ord}(y - z) \geq \theta$, więc część (i) wynika wprost z definicji. Aby udowodnić (ii, \Leftarrow) załóżmy, że $a^n \neq b^n$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $a \neq 0$. Biorąc pod uwagę Wniosek 6.3, wystarczy pokazać, że $o_f(z) = \theta$. Niech $\text{Zer } f = \langle y_0, \dots, y_{p-1} \rangle$ ($p > 0$ całkowite). Niech $I = \{0, \dots, p-1\}$ oraz niech $I_\varphi = \{i \in I : \text{ord}(y_i - \varphi) > \deg \varphi\}$. Dla $i \in I \setminus I_\varphi$ mamy $\text{ord}(y_i - \varphi) \leq \deg \varphi$ i dlatego z własności rzędu $\text{ord}(y_i - z) = \min\{\text{ord}(y_i - \varphi), \text{ord}(z - \varphi)\} \leq \deg \varphi$. Dla $i \in I_\varphi$ mamy $\text{in}(y_i - \varphi) = a^{(i)}X^\theta$ oraz $a^{(i)} \in \{a, a\tau, \dots, a\tau^{n-1}\}$ z Lematu 6.1(c), gdzie $\tau \in U(n)$ jest pierwiastkiem pierwotnym. Jeżeli $b = 0$, to $\text{ord}(z - \varphi) > \theta$ oraz $\text{ord}(y_i - z) = \min\{\text{ord}(y_i - \varphi), \text{ord}(z - \varphi)\} = \theta$. Jeżeli $b \neq 0$, to $\text{in}(z - \varphi) = bX^\theta$. Ponieważ $a^n \neq b^n$, więc $\text{in}(y_i - \varphi) \neq \text{in}(z - \varphi)$. Zatem $\text{ord}(y_i - z) = \theta$, jak wcześniej.

Aby pokazać (ii, \Rightarrow) załóżmy, że $a^n = b^n$. Wystarczy znaleźć $y_i \in \text{Zer } f$ takie, że $\text{ord}(y_i - z) > \theta$. Jeżeli $a^n = b^n = 0$, to jest to prawdą dla dowolnego $i \in I$. Jeżeli $a^n = b^n \neq 0$, to istnieje pierwiastek pierwotny $\tau \in U(n)$ oraz $k \in \{0, \dots, n-1\}$ takie, że $a\tau^k = b$. Z Lematu 6.1(c) wynika, że istnieje $y_i \in \text{Zer } f$ postaci $y_i = \varphi + a\tau^k X^\theta + \dots$ ■

Wniosek 6.6. Niech $f \in \mathbb{C}\{X, Y\}$ będzie gałęzią taką, że $(f, X)_0 < \infty$ oraz niech θ będzie dodatnią liczbą wymierną. Wówczas istnieje gałąź $g \in \mathbb{C}\{X, Y\}$ taka, że $(g, X)_0 < \infty$ oraz $\varkappa(\text{Zer } f, \text{Zer } g) = \theta$. Ponadto $(g, Y)_0 / (g, X)_0 = \min\{\theta, (f, Y)_0 / (f, X)_0\}$.

Dowód. Niech $y \in \text{Zer } f$. Mamy $f = [y]$ z dokładnością do jedności z $\mathbb{C}\{X, Y\}$. Niech $y = \varphi + aX^\theta + \dots$ będzie θ -zapisem szeregu y (możliwe $a = 0$). Niech $N = N(\varphi)$, $\theta = m/(Nn)$, $\text{GCD}(m, n) = 1$ ($m, n > 0$ całkowite). Wybieramy $b \neq 0$ takie, że $a^n \neq b^n$ oraz kładziemy $z = \varphi + bX^\theta$ oraz $g = [z]$. Z Lematu 6.1(b) mamy $(g, X)_0 = Nn < \infty$. Z Lematu 6.5 otrzymujemy $\varkappa(\text{Zer } f, \text{Zer } g) = \theta$. Druga część wynika z równości $\text{ord } z = \min\{\theta, \text{ord } y\}$ oraz z formuły (17) ■

7. DIAGRAMY NEWTONA I KROTNOŚĆ PRZECIĘCIA GAŁĘZI

Przypomnijmy funkcję $\varkappa \mapsto \alpha(\varkappa, \Delta)$ z Rozdziału 3 zdefiniowaną dla $\varkappa > 0$ i dla diagramu Newtona Δ . Jeżeli diagram nie dotyka osi poziomej, to funkcja jest silnie rosnąca i wtedy istnieje funkcja odwrotna $\alpha \mapsto \varkappa(\alpha, \Delta)$. Liczba $\varkappa = \varkappa(\alpha, \Delta)$ jest inklinacją prostej podpierającej Δ , która przecina oś poziomą w punkcie $(\alpha, 0)$.

Lemat 7.1. (por. [4], Property 3.3) Niech $f, g \in \mathbb{C}\{X, Y\}$ będą gałęziami takimi, że $0 < (f, X)_0 < \infty$ oraz $0 < (g, X)_0 < \infty$. Niech (b_0, \dots, b_h) będzie charakterystyką $\text{Zer } f$ ($h \geq 0$) oraz niech Δ będzie zdefiniowane tak, jak we Własności 5.2. Niech

$\varkappa = \varkappa(\text{Zer } f, \text{Zer } g)$. Wówczas

$$(19) \quad \frac{(f, g)_0}{(X, g)_0} = \alpha(\varkappa, \Delta).$$

Dowód. Niech $(f, X)_0 = p$, $(g, X)_0 = q$, $\text{Zer } f = \langle y_0, \dots, y_{p-1} \rangle$, $\text{Zer } g = \langle z_0, \dots, z_{q-1} \rangle$ ($p, q > 0$ całkowite dodatnie). Korzystając z reguły Zeuhten'a otrzymamy

$$(f, g)_0 = \sum_{i,j} \text{ord}(y_i - z_j) = \sum_j \text{ord}(y_0 - z_j) \dots (y_{p-1} - z_j) = \sum_j \text{ord } f(X, z_j(X)).$$

Ponieważ $\text{ord } f(X, z_0) = \dots = \text{ord } f(X, z_{q-1})$ z Własności 6.2, więc

$$(f, g)_0 = q \text{ord } f(X, z_j(X)) = (X, g)_0 \text{ord } f(X, z_j(X)) \text{ dla } j = 0, \dots, q-1.$$

Dla ustalonego $j \in \{0, \dots, q-1\}$ wybierzmy $i \in \{0, \dots, p-1\}$, tak aby otrzymać maksymalne możliwe $\varkappa = \text{ord}(y_i - z_j)$. Jeżeli $\varkappa = \infty$, to wtedy mamy ∞ po obu stronach (19). Załóżmy zatem, że $\varkappa < \infty$. Mamy

$$\frac{(f, g)_0}{(X, g)_0} = \text{ord } f(X, z_j(X)) = \text{ord } f(X, y_i + (z_j - y_i)) = \text{ord } f_{y_i}(X, z_j - y_i),$$

gdzie $f_{y_i}(X, Y) = f(X, y_i + Y)$. Diagram $\Delta = \Delta(f_{y_i})$ ma postać taką jak we Własności 5.2. Nierówność " \geq " w (19) wynika wprost z (6). Przypuśćmy, że nierówność jest ostra. Wówczas z warunku podanego po (6) wynika, że istnieje odcinek $S \in \mathcal{N}(f_{y_i})$ taki, że $|S|_1/|S|_2 = \varkappa = \text{ord}(z_j - y_i)$ oraz $\text{in}(z_j - y_i) \in \text{Zer } \text{in}(f_{y_i}, S)^\circ$. Mamy

$$\text{Zer } f_{y_i} = \langle y_0 - y_i, \dots, y_{p-1} - y_i \rangle.$$

Z Twierdzenia 3.1(ii) wynika, że zbiór $K_S = \{k \in \{1, \dots, p\} : \text{ord}(y_k - y_i) = \text{ord}(z_j - y_i)\}$ jest niepusty. Ponieważ $\text{Zer } \text{in}(f_{y_i}, S)^\circ = \bigoplus_{k \in K_S} \langle \text{in}(y_k - y_i) \rangle$, więc istnieje $k \in K_S$ takie, że $\text{in}(y_k - y_i) = \text{in}(z_j - y_i)$. Dlatego $\text{ord}(y_k - y_i) > \varkappa$, co przeczy wyborowi y_i ■

Uwaga 7.2. We Własności 6.2, jak również w Lemacie 7.1 f może być dowolnym szeregiem takim, że $0 < (f, X)_0 < \infty$. Dowody pozostają takie same.

7.1. Rząd kontaktu. Rozważmy gałęzie $f, g \in \mathbb{C}\{X, Y\}$ oraz ich rząd kontaktu $d(f, g)$ określony formułą (2). Przypomnijmy, że $d(f, g) \geq 1$, z równością wtedy i tylko wtedy, gdy f, g są transwersalne. Ponadto rząd kontaktu spełnia aksjomaty dystansu logarytmicznego, co udowodnimy poniżej.

Lemat 7.3. ([9, 8]) *Dla dowolnych gałęzi $f, g, h \in \mathbb{C}\{X, Y\}$*

$$(D_1) \quad d(f, g) = \infty \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi równość kielków } f = 0, g = 0,$$

$$(D_2) \quad d(f, g) = d(g, f),$$

$$(D_3) \quad d(f, g) \geq \min\{d(f, h), d(g, h)\} \text{ (silna nierówność trójkąta)}.$$

Dowód. (D_1) i (D_2) wynikają z własności krotności przecięcia. Dla dowodu (D_3) najpierw sprawdzimy, że dla każdej gałęzi $f, g \in \mathbb{C}\{X, Y\}$

$$(20) \quad d(f, g) \geq \min\{d(f, X), d(g, X)\} \quad \text{z równością, gdy } d(f, X) \neq d(g, X).$$

Jeżeli spełniona jest jedna z równości $d(f, X) = 1$, $d(f, X) = \infty$, $d(g, X) = 1$, $d(g, X) = \infty$, to (20) jest jasne. Załóżmy zatem, że $1 < d(f, X) < \infty$, $1 < d(g, X) < \infty$. Niech $\text{Zer } f = \langle y_0, \dots, y_{p-1} \rangle$, $(f, X)_0 = p$, $\text{Zer } g = \langle z_0, \dots, z_{q-1} \rangle$, $(g, X)_0 = q$ ($p, q > 0$ całkowite). W tym przypadku mamy $\text{ord } y_i = 1/d(f, X)$ dla $i = 0, \dots, p-1$ oraz $\text{ord } z_j = 1/d(g, X)$ dla $j = 0, \dots, q-1$. Zauważmy, że

$$(f, g)_0 = \sum_{i,j} \text{ord}(y_i - z_j) \geq (f, X)_0 (g, X)_0 \min \left\{ \frac{1}{d(f, X)}, \frac{1}{d(g, X)} \right\}$$

z równością, gdy $d(f, X) \neq d(g, X)$. Dzieliąc przez $(\text{ord } f)(\text{ord } g)$ otrzymujemy (20).

Teraz niech $h \in \mathbb{C}\{X, Y\}$ będzie dowolną gałęzią. Jeżeli $d(f, X) = \infty$, $d(g, X) = \infty$ lub $d(h, X) = \infty$, to nierówność (D_3) wynika z (20). Dlatego możemy założyć, że $d(f, X)$, $d(g, X)$, $d(h, X)$ są skończone. Jeżeli występuje jakakolwiek różnica pomiędzy liczbami $d(f, X)$, $d(g, X)$, $d(h, X)$, to nierówność (D_3) także wynika z (20). Załóżmy zatem, że $d = d(f, X) = d(g, X) = d(h, X) < \infty$.

Wystarczy sprawdzić przypadek $d(f, g) \leq \min\{d(f, h), d(g, h)\}$. Możemy założyć, że $d(f, h) \geq d(g, h) \geq d(f, g)$. Niech $\varkappa_{f,h} = \varkappa(\text{Zer } f, \text{Zer } h)$, $\varkappa_{g,h} = \varkappa(\text{Zer } g, \text{Zer } h)$ oraz niech $\Delta = \Delta(h_w)$ dla $w \in \text{Zer } h$, gdzie $h_w = h(X, w + Y)$ (patrz: Rozdział 5). Z Lematu 7.1 mamy

$$d(f, h) = C \alpha(\varkappa_{f,h}, \Delta) \text{ oraz } d(g, h) = C \alpha(\varkappa_{g,h}, \Delta) \text{ dla } C = d/(\text{ord } f).$$

Z nierówności $d(f, h) \geq d(g, h)$ otrzymujemy $\varkappa_{f,h} \geq \varkappa_{g,h}$ (patrz: początek Rozdziału 7). Analogicznie pokazujemy, że $\varkappa_{g,h} \geq \varkappa_{f,g}$. Z Wniosku 6.4 otrzymujemy $\varkappa_{f,g} \geq \varkappa_{g,h}$. Zatem $d(f, g) = d(g, h) = \min\{d(f, h), d(g, h)\}$ ■

Konsekwencją (D_3) jest

$$(D'_3) \text{ Jeżeli } d(f, h) \neq d(g, h), \text{ to } d(f, g) = \min\{d(f, h), d(g, h)\}.$$

Dowód. Możemy założyć, że $d(f, h) > d(g, h)$. Przypuśćmy, że $d(f, g) > \min\{d(f, h), d(g, h)\}$. Wtedy $d(f, g) > d(f, h) > d(g, h)$, co przeczy $d(g, h) \geq \min\{d(f, g), d(f, h)\}$ ■

Własność 7.4. Niech $f \in \mathbb{C}\{X, Y\}$ będzie gałęzią.

- (a) Jeżeli $d(f, Y) \geq d(f, X)$, to $d(f, X) = 1$.
- (b) Jeżeli $d(f, X) > 1$, to $d(f, Y) = 1$.

Dowód. (a) Z (D_3) mamy $1 = d(X, Y) \geq \min\{d(f, X), d(f, Y)\} = d(f, X) \geq 1$.
 (b) Z (D'_3) mamy $d(f, Y) = \min\{d(f, X), d(X, Y)\} = 1$ ■

8. DOWÓD TWIERDZENIA

Założmy najpierw, że $d(f, X) = \infty$. Wówczas $f = X$ z dokładnością do jedności w $\mathbb{C}\{X, Y\}$. Niech $R = p/q$, $\text{GCD}(p, q) = 1$, $p \geq q$ ($p, q > 0$ całkowite). Kładziemy $g = [X^{q/p}] = Y^p - X^q$. Sprawdzamy, że $d(f, g) = p/q = R$. Załóżmy teraz, że $d(f, X) < \infty$. Jeżeli $R < d(f, X)$, to wybieramy, jak wcześniej, gałąź g taką, że $d(g, X) = R$. Mamy z (D'_3) $d(f, g) = \min\{d(f, X), d(g, X)\} = R$. Jeżeli $R = d(f, X)$, to przyjmujemy $g = X$. Pozostał zatem przypadek $d(f, X) < R$. Niech $y \in \text{Zer } f$ będzie pierwiastkiem Puiseux o charakterystyce (b_0, \dots, b_h) i niech $\Delta = \Delta(f_y)$ (Własność 5.2). Będziemy rozważać dwie możliwe pozycje f

względem X . Załóżmy najpierw, że f i X są transwersalne, czyli $d(f, X) = 1$. Jeżeli $\mathbf{h} = 0$, to $\Delta = \left\{ \frac{\infty}{1} \right\}$ (por. rysunek w Rozdziale 5). Jeżeli $\mathbf{h} \geq 1$, to $b_0 = (f, X)_0 = \text{ord } f = \min\{b_0, b_1\}$ (Własność 5.1). W tym drugim przypadku $b_0 \leq b_1$, skąd $b_0 < b_1$. Oznacza to, że inklinacje wszystkich zwartych krawędzi wielokąta $\Delta = \Delta(f_y)$ są ostro większe od 1. Zatem w obu przypadkach $\alpha(1, \Delta) = \text{ord } f$ oraz $\varkappa(\text{ord } f, \Delta) = 1$. Ponieważ funkcja $\alpha \mapsto \varkappa(\alpha, \Delta)$ jest silnie rosnąca i $R > 1$, dlatego $\theta = \varkappa(R \text{ord } f, \Delta) > 1$. Na mocy Wniosku 6.6 dobieramy gałąź g , $d(g, X) < \infty$ taką, że $\varkappa(\text{Zer } f, \text{Zer } g) = \theta$ oraz $d(g, Y)/d(g, X) = \min\{\theta, d(f, Y)/d(f, X)\} \geq 1$. Z Własności 7.4 mamy $d(g, X) = 1$, czyli $(g, X)_0 = \text{ord } g$. Z Lematu 7.1 $(f, g)_0/(X, g)_0 = \alpha(\theta, \Delta) = R \text{ord } f$, skąd $d(f, g) = R$.

Teraz rozważmy przypadek, że f i X są styczne ($1 < d(f, X) < R$). Mamy $(f, X)_0 > \text{ord } f$. Wtedy $\mathbf{h} \geq 1$. Z Własności 7.4 $d(f, Y) = 1$. Z Własności 5.1 otrzymujemy

$$\text{ord } f = (f, Y)_0 = \min\{b_0, b_1\} = \min\{(f, X)_0, b_1\} = b_1.$$

Stąd $d(f, X) = (f, X)_0/\text{ord } f = b_0/b_1$. Zatem $\alpha(\frac{b_1}{b_0}, \Delta) = b_1 = \text{ord } f$ oraz $\varkappa(\text{ord } f, \Delta) = \frac{b_1}{b_0}$. Zdefiniujmy $\theta = \varkappa(\frac{R \text{ord } f}{d(f, X)}, \Delta)$. Ponieważ funkcja $\alpha \mapsto \varkappa(\alpha, \Delta)$ jest silnie rosnąca, dlatego

$$\theta = \varkappa\left(\frac{R \text{ord } f}{d(f, X)}, \Delta\right) > \varkappa(\text{ord } f, \Delta) = \frac{b_1}{b_0}.$$

Czyli $\theta > b_1/b_0 = (f, Y)_0/(f, X)_0 = d(f, Y)/d(f, X)$. Z Własności 6.6 dobieramy dla θ i f gałąź g taką, że $\theta = \varkappa(\text{Zer } f, \text{Zer } g)$ oraz

$$\frac{d(g, Y)}{d(g, X)} = \min\left\{\theta, \frac{d(f, Y)}{d(f, X)}\right\} = \frac{d(f, Y)}{d(f, X)} < 1.$$

Z Własności 7.4 mamy $d(g, Y) = 1$, zatem $d(g, X) = d(f, X)$. Korzystając z Lematu 7.1 otrzymujemy

$$\frac{(f, g)_0}{(X, g)_0} = \alpha(\theta, \Delta) = \frac{R \text{ord } f}{d(f, X)} = \frac{R \text{ord } f}{d(g, X)},$$

skąd $d(f, g) = R$ ■

LITERATURA

- [1] I. Abío, M. Alberich-Carramiñana and V. González-Alonso, *The ultrametric space of plane branches*, Comm. in Algebra 39 (2012), 4206–4220.
- [2] J. Cano, *The Puiseux theorem for differential equations*, in D. T. Lê, K. Saito, B. Teissier (eds), *Singularity Theory*, World Scientific Publ., pp. 128–152, 1995.
- [3] H. Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Hermann, Paris, 1961.
- [4] J. Gwoździwicz, A. Płoski, *On the Merle formula for polar invariants*, Bull. Soc. Sci. Letters Łódź 41(7), (1991), 61–67.
- [5] T. C. Kuo, A. Parusiński, *Newton polygon relative to an arc*, in: J. W. Bruce, F. Tari (eds), *Real and Complex Singularities*, São Carlos, pp. 76–93, 1998.
- [6] A. Lenarcik, *Algorytm Newtona i szeregi Puiseux*, Materiały XXIV Konferencji Szkoleniowej z Geometrii Analitycznej i Algebraicznej Zespólonej, Łódź 2003, 21–32.

- [7] A. Lenarcik, *Polar quotients of a plane curve and the Newton algorithm*, Kodai Math. J. **27**, (2004), 336–353.
- [8] J. Chądzyński, A. Płoski, *An inequality for the intersection multiplicity of analytic curves*, Bull. Polish Acad. Sci. Math., **36**(3-4), (1988), 113–117.
- [9] A. Płoski, *Remarque sur la multiplicité d'intersection des branches planes*, Bull. Pol. Acad. Sci. Math. **33**(11-12), (1985), 601–605.
- [10] A. Płoski, *Szeregi Puiseux, diagramy Newtona i odwzorowania holomorficzne płaszczyzny \mathbb{C}^2* , Materiały X Konferencji Szkoleniowej z Teorii Zagadnień Ekstremalnych, Łódź 1989, 74–99.
- [11] A. Płoski, *Sur l'exposant d'une application analytique II*, Bull. Pol. Acad. Sci. Math. **33**, (1985), 123–127.
- [12] Whitney, H.: *Complex Analytic Varieties*. Addison-Wesley, Reading (1972)
- [13] R. Walker, *Algebraic curves*, Princeton University Press 1950.

ON LOGARYTHMIC DISTANCE BETWEEN BRANCHES

By a branch we mean an irreducible germ of a complex plane curve. The intersection multiplicity of two branches divided by their multiplicities satisfies the axioms of logarithmic distance [9]. The properties of balls defined by using this distance are analogous to that in ultrametric spaces. In this paper for an arbitrary fixed branch we construct effectively a new branch such that the distance between branches is an arbitrary rational greater than or equal to one. This crucial fact was proved in [1]. This fact allows to show, for example, that equal balls have equal diameters.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
 KIELCE UNIVERSITY OF TECHNOLOGY
 AL. TYSIĄCLECIA PAŃSTWA POLSKIEGO 7
 25-314 KIELCE, POLAND
 E-MAIL: ztpal@tu.kielce.pl

Łódź, 5 – 9 stycznia 2015 r.