**MATERIAŁY NA XXIX KONFERENCJĘ SZKOLENIOWĄ
Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ
ZESPOLONEJ**

2008 **Łódź** **str. 27**

O PRZESTRZENIACH ULTRAMETRYCZNYCH, KRZYWYCH Z GŁADKIMI GAŁĘZIAMI, DRZEWACH I NIEZMIENNIKACH WIELOMIANOWYCH

Andrzej Lenarcik (Kielce)

Pokazujemy, że istnieje wzajemna odpowiedniość pomiędzy kiełkami osobliwości krzywych o gładkich gałęziach i przestrzeniami ultrametrycznymi z ultrametryką o wartościach w zbiorze $\mathbf{\Gamma} = \{1, 2, \ldots\} \cup \{\infty\}$. Konstruujemy dwa niezmienniki wielomianowe, które są identyczne dla krzywych ekwisingularnych (przestrzeni izometrycznych). Prezentujemy własności niezmienników, które umożliwiają ich efektywne obliczanie. Konstruujemy dwie krzywe nieekwisingularne (przestrzenie nieizometryczne) o identycznych niezmiennikach wielomianowych.

1 Przestrzenie ultrametryczne

Przytaczamy definicję przestrzeni ultrametrycznej za [K]. Trójkę $(\mathbf{X}, \mathbf{\Gamma}, d)$ nazywamy *przestrzenią ultrametryczną* jeżeli $\mathbf{X}$ jest zbiorem, $\mathbf{\Gamma}$ jest przestrzenią liniowo uporządkowaną z elementem maksymalnym ∞ oraz $d : \mathbf{X} \times \mathbf{X} \to \mathbf{\Gamma}$ jest funkcją (ultrametryką), która dla dowolnych $x, y, z \in \mathbf{X}$ spełnia własności:

(d_1) $d(x,y)=\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x=y$,

(d_2) $d(x,y)=d(y,x)$,

(d_3) $d(x,z)\geqslant \min\{d(x,y),d(y,z)\}$.

Własność (d_3) nazywamy *silną nierównością trójkąta*. Wnioskiem z powyższego jest własność:

(d_4) jeżeli $d(x,y)\neq d(y,z)$, to $d(x,z)=\min\{d(x,y),d(y,z)\}$.

W tym artykule $\mathbf{\Gamma}$ jest zawsze podzbiorem liczb rzeczywistych. Zbiór ten traktujemy domyślnie.

Przykład 1.1 Niech $\mathbf{X}=\{x_0,\ldots,x_n\}$ będzie zbiorem skończonym i niech $\gamma_1,\ldots,\gamma_n$ będzie dowolnym ciągiem liczb rzeczywistych (γ_i rozumiemy jako odległość elementów x_{i-1} oraz x_i dla $i=1,\ldots,n$). Kładąc $d(x_i,x_i)=\infty$, dla $i=0,1,\ldots,n$, oraz

$$d(x_i,x_j)=d(x_j,x_i)=\min\{\gamma_{i+1},\ldots,\gamma_j\}\ ,\ \text{dla } 0\leqslant i<j\leqslant n\ ,$$

otrzymujemy przestrzeń ultrametryczną. Jeżeli w przestrzeni tej wprowadzimy porządek indukowany przez numerację elementów ($x_i\leqslant x_j \Leftrightarrow i\leqslant j$), to dla dowolnych $x,y,z\in\mathbf{X}$ spełniona jest własność

(d_3') jeżeli $x\leqslant y\leqslant z$, to $d(x,z)=\min\{d(x,y),d(y,z)\}$.

Lemat 1.2 *Niech* $\mathbf{X}$ *będzie skończoną przestrzenią ultrametryczną. Wówczas istnieje porządek liniowy w* X *taki, że zachodzi* (d_3').

Definicja 1.3 Porządek, o jakim mowa w Lemacie 1.2, będziemy nazywać *porządkiem dopuszczalnym* dla danej przestrzeni ultrametrycznej. Porządek ten nie musi być określony jednoznacznie.

Przykład 1.4 (ultrametryka Płoskiego [Ch-P])
Niech $f,g\in\mathbf{C}\{X,Y\}$ będą szeregami nierozkładalnymi. Wówczas

$$d(f,g)=\frac{(f,g)_0}{(\operatorname{ord} f)(\operatorname{ord} g)} \tag{1}$$

spełnia aksjomaty przestrzeni ultrametrycznej.

Jeżeli f,g są gładkie, to $d(f,g)=(f,g)_0$.

Twierdzenie 1.5 *Niech* $\mathbf{X}$ *będzie skończoną przestrzenią ultrametryczną o wartościach w* $\{1,2,\ldots\}\cup\{\infty\}$ *taką, że* $X=\{x_1,\ldots,x_n\}$. *Wówczas istnieje krzywa* $f=f_1\ldots f_n\in\mathbf{C}\{X,Y\}$ *o gładkich gałęziach taka, że*

$$d(x_i,x_j)=(f_i,f_j)_0 \ \text{ dla } i,j=1,\ldots,n\ . \tag{2}$$

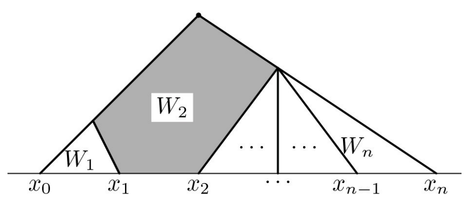
Dowód. Możemy założyć, że porządek w $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ jest dopuszczalny, tzn. $d(x_{i-1}, x_{i+1}) = \min\{d(x_{i-1}, x_i), d(x_i, x_{i+1})\}$ dla $i = 2, \dots, n-1$. Następnie definiujemy ciąg krzywych $f_1, \dots, f_n$ kładąc:

$$f_1 = Y, \dots, f_i = f_{i-1} + X^{d(x_{i-1}, x_i)} \quad i = 2, \dots, n$$

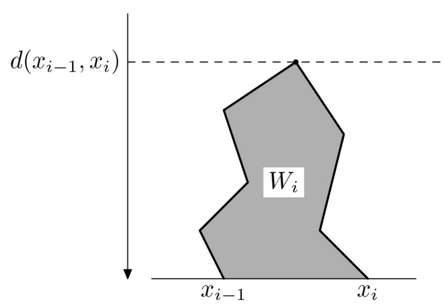
łatwo sprawdzamy, że zachodzi (2).

2 Drzewa

Pokażemy, że każda skończona przestrzeń ultrametryczna ma model w postaci drzewa. Drzewo rozumiemy jako zbiór wielokątów na płaszczyźnie euklidesowej. Punkty $x_0, x_1, \dots, x_n$ utożsamiamy z punktami ułożonymi na prostej, zgodnie z numeracją. Każdemu odcinkowi łączącemu x_{i-1} z x_i odpowiada wielokąt W_i ($i = 1, \dots, n$).



Odległość $d(x_{i-1}, x_i)$ odczytujemy na podstawie najwyżej położonego wierzchołka wielokąta W_i. Liczbę tą będziemy nazywali umownie *rzędną* wielokąta (drzewa).



Odległość $d(x_i, x_j)$ $(i < j)$ odczytujemy na podstawie rzędnej najwyżej położonego wierzchołka wielokąta $W_{i+1} \cup \ldots \cup W_j$.

Każde drzewo definiuje ultrametrykę w zbiorze $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ (por. Przykład 1.1). Fakt, że każdej skończonej przestrzeni ultrametrycznej odpowiada drzewo, wynika z Lematu 1.2. Łącząc Lemat 1.2 i Twierdzenie 1.5 otrzymujemy wniosek, że istnieje wzajemna odpowiedniość pomiędzy krzywymi o komponentach gładkich i drzewami o całkowitych i dodatnich rzędnych. Obserwacja ta pozwola definiować krzywe za pomocą drzew.

3 Niezmienniki wielomianowe

Definiujemy dwa niezmienniki wielomianowe skończonych przestrzeni ultrametrycznych. Wykorzystamy elementarne własności wyznacznika. Niech A będzie macierzą kwadratową zbudowaną z liczb rzeczywistych i oznaczmy przez $\mathbf{1}$ macierz złożoną z samych jedynek. Łatwo zauważyć, że $\det(A + \mathbf{1}t) = \det A + \alpha t$, gdzie $\alpha \in \mathbf{R}$ jest liczbą równą sumie dopełnień algebraicznych macierzy A. Liczbę tę będziemy oznaczać $\det' A$. Niech A i B będą macierzami kwadratowymi (niekoniecznie równych wymiarów). Oznaczmy

$$A * B = \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{bmatrix}$$

Wówczas zachodzi

$$\det'(A * B) = \det' A \det B + \det A \det' B \ . \tag{3}$$

Definicja 3.1 Niech $\mathbf{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ będzie skończoną przestrzenią ultrametryczną. Definiujemy dwa wielomiany zmiennej X:

$$w(X) = \det \begin{bmatrix} X & d(x_1, x_2) & \ldots & d(x_1, x_n) \\ d(x_2, x_1) & X & \ldots & d(x_2, x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d(x_n, x_1) & d(x_n, x_2) & \ldots & X \end{bmatrix}$$

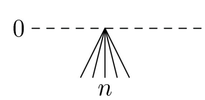
oraz

$$\tilde{w}(X) = \det' \begin{bmatrix} X & d(x_1, x_2) & \ldots & d(x_1, x_n) \\ d(x_2, x_1) & X & \ldots & d(x_2, x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d(x_n, x_1) & d(x_n, x_2) & \ldots & X \end{bmatrix} .$$

Łatwo sprawdzamy, że oba wielomiany są identyczne dla przestrzeni izometrycznych. Będziemy je nazywać *wielomianami charakterystycznymi*.

Wniosek 3.2 W przestrzeni krzywych o komponentach gładkich wielomiany charakterystyczne są niezmiennikami ekwisingularności.

Przykład 3.3 Rozważmy n-elementową przestrzeń ultrametryczną, w której odległość każdych różnych punktów wynosi zero. Sprawdzamy, że $w(X) = X^n$ oraz $\tilde{w}(X) = nX^{n-1}$.



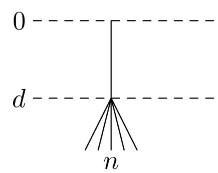
Własność 3.4 *Niech $w(X)$ oraz $\tilde{w}(X)$ będą wielomianami charakrerystycznymi przestrzeni ultrametrycznej. Jeżeli każdą skończoną odległość powiększymy o stałą wielkość d, to wielomiany dla otrzymanej w ten sposób przestrzeni będą miały postać*

$$w^d(X) = w(X - d) + d\,\tilde{w}(X - d), \qquad \tilde{w}^d(X) = \tilde{w}(X - d) \ .$$

Operację zdefiniowaną powyżej będziemy nazywać *przesunięciem* przestrzeni ultrametrycznej.

Przykład 3.5 Przesuwając przestrzeń z Przykładu 3.3 otrzymamy

$$w^d(X) = (X-d)^n + nd(X-d)^{n-1}, \qquad \tilde{w}^d(X) = n(X-d)^{n-1} .$$



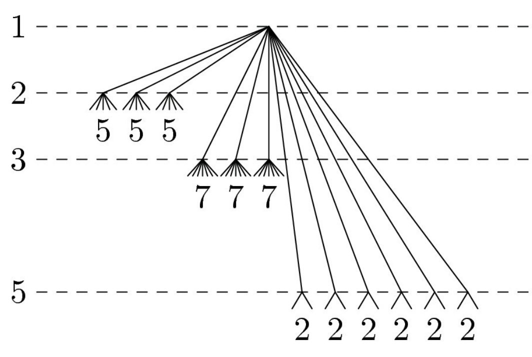
Progiem przestrzeni ultrametrycznej będziemy nazywać minimalną odległość dwóch punktów tej przestrzeni. Niech $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, będą przestrzeniami ultrametrycznymi, których progi są nie mniejsze od ustalonej liczby d. Wówczas w zbiorze $\mathbf{X} \cup \mathbf{Y}$ możemy naturalnie zdefiniować ultrametrykę: przez dziedziczenie w komponentach $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ oraz przyjmując $d(x,y) = d$ dla $x \in \mathbf{X}$ i $y \in \mathbf{Y}$. Operację tę będziemy nazywać *sklejeniem* przestrzeni ultrametrycznych na poziomie d.

Własność 3.6 *Niech $w_1(X)$, $\tilde{w}_1(X)$ będą wielomianami charakrerystycznymi przestrzeni $\mathbf{X}$, zaś $w_2(X)$, $\tilde{w}_2(X)$ wielomianami charakrerystycznymi przestrzeni $\mathbf{Y}$. Wówczas wielomiany charakterystyczne $w(X)$, $\tilde{w}(X)$ sklejenia $\mathbf{X} \cup \mathbf{Y}$ na poziomie zero mają postać*

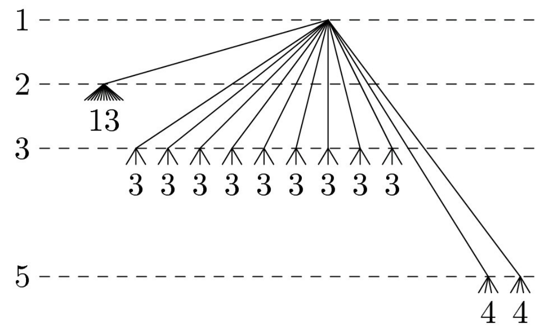
$$w(X) = w_1(X)w_2(X), \qquad \tilde{w}(X) = \tilde{w}_1(X)w_2(X) + w_1(X)\tilde{w}_2(X) .$$

4 Zastosowanie drzew do konstrukcji osobliwości

Rozważmy krzywą $\{f = 0\}$ zdefiniowaną za pomocą drzewa



oraz krzywą $\{g = 0\}$ zdefiniowaną za pomocą drzewa



Wykonując wielokrotnie operację sklejania i przesuwania sprawdzamy, że krzywe mają jednakowe wielomiany charakterystyczne. Ponieważ krzywe te nie są ekwisingularne (mają np. inne kolekcje Teissiera (q, m_q) [T]), zatem wielomiany charakterystyczne nie pozwalają rozróżniać klas ekwisingularności krzywych o gałęziach gładkich. Ciekawostką jest fakt, że krzywe $\{f = 0\}$ i $\{g = 0\}$ mają jednakowe niezmienniki $\sum qm_q$ oraz $\sum q^2 m_q$ (momenty pierwszego i drugiego rzędu). Pierwszy z nich jest ściśle związany z liczbą Milnora.

Podziękowania

Autor dziękuje Marcinowi Kurczychowi i Piotrowi Lenarcikowi za zaznajomienie z pojęciem wielomianu charakterystycznego grafu, który był inspiracją do zdefiniowania niezmienników wielomianowych.

Literatura

[Ch-P] J. Chądzyński, A. Płoski, *An inequality for the intersection multiplicity of analytic curves*, Bull. Pol. Acad. Sci. Math., Vol. 36, No 3-4, (1988), 113–117.

[K] F.V. Kuhlmann, *Maps on ultrameric spaces, Hensel's Lemma, and differential equations over valued fields*, preprint 8.7.2006.

[T] B. Teissier, *Polyèdre de Newton Jacobien et équisingularité*, in: Séminaire sur les Singularités, Publ. Math. Univ. Paris VII 7, 1980, 193–221.

ON ULTRAMETRIC SPACES, GERMS WITH SMOOTH BRANCHES, TREES AND POLYNOMIAL INVARIANTS

Summary. We show that there exists one-to-one correspondence between curve germs with smooth branches and finite ultrametric spaces with distances in the set $\{1, 2, \ldots\} \cup \{\infty\}$. We construct two polynomial invariants which coincide on equisingular germs (isometric spaces). We present some properties of these invariants that are convenient for their computations. We show two non-equisingular germs (non-isometric spaces) with the same polynomial invariants.

Łódź, 7 – 11 stycznia 2008 r.