

KRZYWE A WĘZŁY III.
WĘZŁY KRZYWYCH ANALITYCZNYCH
NIEROZKŁADALNYCH

Tadeusz Krasiński (Łódź)

Abstrakt. W części I i II pracy omówiliśmy węzły toryczne pierwszego, i odpowiednio wyższych rzędów. W tej części pracy przedstawimy związek węzłów torycznych z krzywymi analitycznymi nierozkładalnymi na płaszczyźnie zespolonej \mathbb{C}^2 .

1 Krzywe analityczne

W tym punkcie przypomnimy znane podstawowe własności krzywych analitycznych na płaszczyźnie zespolonej \mathbb{C}^2 . Szczegóły czytelnik znajdzie w wielu podręcznikach dotyczących krzywych lub geometrii analitycznej zespolonej [KP], [W], [BK], [L].

Dla danego zbioru $V \subset \mathbb{C}^n$ przez \widehat{V} oznaczamy jego kielek w $0 \in \mathbb{C}^n$. *Lokalną krzywą analityczną* (lub krótko *krzywą*) nazywamy dowolny kielek \mathbf{V} w $0 \in \mathbb{C}^2$ zbioru zer pewnej funkcji holomorficzej $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ spełniającej warunki: $f \neq \text{const}$, $f(0, 0) = 0$. Wtedy $\text{ord } f > 0$. Krzywą opisaną przez funkcję holomorficzną $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ oznaczamy $V(f)$. Gdy f jest określona w pewnym otoczeniu U punktu 0 , to zbiór zer f w U oznaczamy $V_U(f)$. Ponieważ $\mathbb{C}\{x, y\}$ jest pierścieniem z jednoznacznością rozkładu, więc będziemy zawsze zakładać, że funkcja f opisująca

krzywą V jest *zredukowana*, tzn. nie ma czynników wielokrotnych w rozkładzie na czynniki nieprzywiedlne w $\mathbb{C}\{x, y\}$. Każda krzywa $V = V(f)$ ma jednoznaczny rozkład na *składowe nieprzywiedlne*

$$V = V_1 \cup \dots \cup V_k,$$

zwane *gałęziami* krzywej V . Gałęzie te odpowiadają jednoznacznie czynnikom rozkładu f na czynniki nierozkładalne w $\mathbb{C}\{x, y\}$, tzn. jeśli $f = f_1 \dots f_l$ w $\mathbb{C}\{x, y\}$ i f_i są nierozkładalne i niestowarzyszone, to $k = l$ i po odpowiednim przenumerowaniu $V_i = V(f_i)$, $i = 1, \dots, k$. Ponieważ interesują nas własności krzywych analitycznych niezmiennicze względem biholomorfizmów otoczeń zera w \mathbb{C}^2 , więc możemy zawsze założyć, że funkcja f opisująca krzywą analityczną V spełnia warunek

$$(1) \quad \text{ord } f = \text{ord } f(0, y)$$

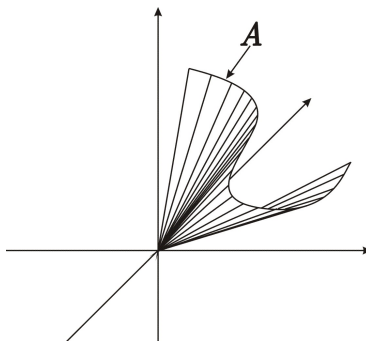
(otrzymujemy ten warunek przez liniową zamianę zmiennych w \mathbb{C}^2). Co więcej, na mocy twierdzenia Weierstrassa możemy dodatkowo założyć, że f jest wielomianem wyróżnionym, tzn. $f \in \mathbb{C}\{x\}[y]$ i ma postać

$$(2) \quad f(x, y) = y^n + a_1(x)y^{n-1} + \dots + a_n(x), \quad n > 0, \quad \text{ord } a_i \geq i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Wówczas każda gałąź V_i krzywej $V(f)$ ma *parametryzację Puiseux*, tzn. istnieje holomorficzne, różnowartościowe odwzorowanie $\Phi_i(t) = (t^{n_i}, \varphi_i(t))$, $\text{ord } \varphi_i \geq n_i$, określone w pewnym otoczeniu $0 \in \mathbb{C}$ takie, że $V_i = \widehat{\text{Im } \Phi_i}$. Co więcej, jeśli f jest nierozkładalna w $\mathbb{C}\{x\}[y]$, to w (2) możemy założyć, że $\text{ord } a_i > i$, $i = 1, \dots, n$, a wtedy dla parametryzacji Puiseux $\Phi(t) = (t^n, \varphi(t))$ jedynej gałęzi f zachodzi $\text{ord } \varphi > n$.

Podstawowym twierdzeniem na którym opiera się badanie struktury topologicznej krzywych lokalnych jest twierdzenie Milnora o strukturze stożka lokalnej krzywej. Zanim podamy to twierdzenie zdefiniujemy pojęcie stożka o danej podstawie. Dla dowolnego $A \subset \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ *stożkiem o podstawie A* nazywamy sumę odcinków łączących punkt 0 z punktami A i oznaczamy $\text{cone}(A)$. Zatem

$$\text{cone}(A) := \{z \in \mathbb{C}^n : z = ta, t \in [0, 1], a \in A\}$$



Zauważmy, że dla dowolnego, domkniętego policyndra $P(\varepsilon, \eta) := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : |x| \leq \varepsilon, |y| \leq \eta\} \subset \mathbb{C}^2$ o środku w zerze i promieniach $\varepsilon, \eta > 0$ i jego brzegu

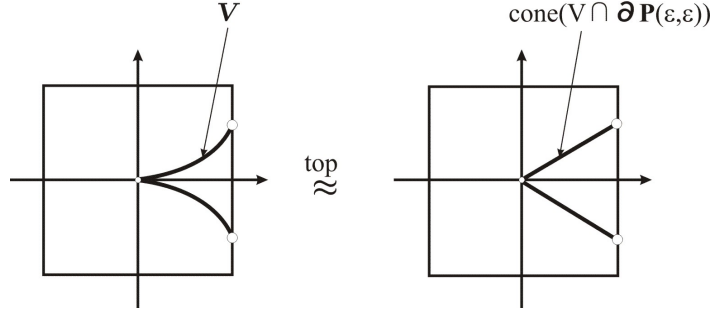
$$\partial P(\varepsilon, \eta) = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : |x| = \varepsilon, |y| \leq \eta\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : |x| \leq \varepsilon, |y| = \eta\}$$

zachodzi

$$\text{cone}(\partial P(\varepsilon, \eta)) = P(\varepsilon, \eta).$$

Twierdzenie 1.1 (Milnora) Niech V będzie krzywą nierozkładalną i $V := V_U(f)$ jej reprezentantem. Załóżmy, że f jest wielomianem wyróżnionym, tzn. $f \in \mathbb{C}\{x\}[y]$, ma postać (2) oraz w parametryzacji Puiseux $\Phi(t) = (t^n, \varphi(t))$ jedynej gałęzi f zachodzi $\text{ord } \varphi > n$. Wówczas istnieje $\tilde{\varepsilon} > 0$ takie, że $P(\tilde{\varepsilon}, \tilde{\varepsilon}) \subset U$ oraz dla dowolnego $\varepsilon, 0 < \varepsilon < \tilde{\varepsilon}$ istnieje homeomorfizm par

$$(P(\varepsilon, \varepsilon), V \cap P(\varepsilon, \varepsilon)) \stackrel{\text{top}}{\approx} (P(\varepsilon, \varepsilon), \text{cone}(V \cap \partial P(\varepsilon, \varepsilon)))$$



oraz dla dowolnych $\varepsilon, \varepsilon', 0 < \varepsilon < \varepsilon' < \tilde{\varepsilon}$ istnieje homeomorfizm par

$$(\partial P(\varepsilon, \varepsilon), V \cap \partial P(\varepsilon, \varepsilon)) \stackrel{\text{top}}{\approx} (\partial P(\varepsilon', \varepsilon'), V \cap \partial P(\varepsilon', \varepsilon')).$$

Dowód można znaleźć w [M], [P], [W]. Twierdzenie to mówi, że zanurzenie V w policyndrze P jest wyznaczone, z dokładnością do homeomorfizmu P , przez ślad V na brzegu tego policyndra.

Uwaga 1.2 Twierdzenie Milnora dowodzi się zwykle dla kul domkniętych. Wówczas zbędne są założenia o postaci funkcji f .

2 Węzeł krzywej nierozkładalnej

Niech $V = V(f)$ będzie krzywą nierozkładalną, gdzie $f \in \mathbb{C}\{x\}[y]$ jest wielomianem wyróżnionym stopnia n , $n := \text{ord } f = \text{ord } f(0, y)$. Wówczas V ma parametryzację Puiseux $\Phi(t) = (t^n, \varphi(t))$, $t \in K$ – otoczenie zera w \mathbb{C} , $\text{ord } \varphi > n$, w pewnym otoczeniu U zera w \mathbb{C}^2 , tzn. f jest określona w U i

$$(3) \quad V_U(f) = \{\Phi(t) : t \in K\}.$$

Oznaczmy $V := V_U(f)$. Na mocy twierdzenia Milnora istnieje $\tilde{\varepsilon} > 0$ takie, że $P(\tilde{\varepsilon}, \tilde{\varepsilon}) \subset U$ oraz dla dowolnego ε , $0 < \varepsilon < \tilde{\varepsilon}$, ślady V na brzegach $\partial P(\varepsilon, \varepsilon)$ policylindrów $P(\varepsilon, \varepsilon)$ są w tych brzegach topologicznie równoważne, tzn. dla dowolnych $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon$ istnieją homeomorfizmy $H : \partial P(\varepsilon_1, \varepsilon_1) \rightarrow \partial P(\varepsilon_2, \varepsilon_2)$ takie, że $H(V \cap \partial P(\varepsilon_1, \varepsilon_1)) = V \cap \partial P(\varepsilon_2, \varepsilon_2)$. Ponadto z postaci Φ wynika, że zmniejszając $\tilde{\varepsilon}$, możemy założyć, że $|\varphi(t)| < |t|$ dla $t \in K$.

Stąd oraz ponownie z postaci parametryzacji Puiseux $\Phi(t) = (t^n, \varphi(t))$ wynika, że dla ε , $0 < \varepsilon < \tilde{\varepsilon}$, mamy $V \cap \partial P(\varepsilon, \varepsilon) = \Phi(S(\varepsilon^{1/n}))$, gdzie przez $S(r)$ oznaczamy okrąg w \mathbb{C} o środku w 0 i promieniu $r > 0$. Zatem ślad V w każdym z brzegów tych policylindrów jest homeomorficzny z S^1 . Z drugiej strony brzeg $\partial P(\varepsilon, \varepsilon)$ jest homeomorficzny z trójwymiarową sferą $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{0\}$ (zob. I, §3), a więc $V \cap \partial P(\varepsilon, \varepsilon)$ jest węzłem. Z powyższego wynika, że węzeł ten nie zależy od wyboru promienia ε . Nazywamy go *węzłem krzywej* i oznaczamy K_V . Wówczas z definicji grupa węzła $\pi(K_V)$ jest równa $\pi_1(\partial P(\varepsilon, \varepsilon) \setminus V, *)$, gdzie $*$ $\in \partial P(\varepsilon, \varepsilon) \setminus V$. Z twierdzenia Milnora wynika, że grupę tę możemy zdefiniować inaczej.

Lemat 2.1 $\pi(K_V) \cong \pi_1(P(\varepsilon, \varepsilon) \setminus V)$.

Dowód. Jako punkt bazowy dla obu grup podstawowych weźmy punkt $*$ $\in \partial P(\varepsilon, \varepsilon) \setminus V$. Musimy wykazać, że

$$\pi_1(\partial P(\varepsilon, \varepsilon) \setminus V, *) \cong \pi_1(P(\varepsilon, \varepsilon) \setminus V).$$

Izomorfizm wynika z twierdzenia Milnora, gdyż ze struktury stożka V w $P(\varepsilon, \varepsilon)$ wynika, że każda pętla w $P(\varepsilon, \varepsilon) \setminus V$ o początku i końcu w $*$ jest homotopijna pętli leżącej w $\partial P(\varepsilon, \varepsilon) \setminus V$. ■

Niech $(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_h)$ będzie charakterystyką krzywej V i $((m_1, n_1), \dots, (m_h, n_h))$ będzie ciągiem par charakterystycznych V . Przypomnijmy, że jeżeli $\varphi(t) = a_{p_1} t^{p_1} + a_{p_2} t^{p_2} + \dots$, $a_{p_i} \neq 0$, $i \geq 1$, to

$$\beta_0 = n,$$

$$\beta_i = \min\{p_k : \text{NWD}(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{i-1}, p_k) < \text{NWD}(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{i-1})\}, \quad i = 1, \dots, h$$

oraz

$$\begin{aligned} \frac{\beta_1}{\beta_0} &= \frac{m_1}{n_1}, \quad \text{NWD}(m_1, n_1) = 1, \\ \frac{\beta_2}{\beta_0} &= \frac{m_2}{n_1 n_2}, \quad \text{NWD}(m_2, n_2) = 1, \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{\beta_h}{\beta_0} &= \frac{m_h}{n_1 \cdots n_h}, \quad \text{NWD}(m_h, n_h) = 1. \end{aligned}$$

Ponieważ

$$\frac{\beta_1}{\beta_0} < \frac{\beta_2}{\beta_0} < \dots < \frac{\beta_h}{\beta_0},$$

więc

$$(4) \quad m_i < m_{i-1}n_i \text{ dla } i = 2, \dots, h$$

Twierdzenie 2.2 *Przy powyższych założeniach o osobliwości \mathbf{V} węzeł $K_{\mathbf{V}}$ jest węzłem torycznym typu $(m_1, n_1), \dots, (m_h, n_h)$, tzn.*

$$K_{\mathbf{V}} \sim T_{(m_1, n_1) \dots (m_h, n_h)}.$$

Dowód. Przyjmujemy powyższe oznaczenia i ustalenia. Oznaczmy przez π_1 rzutowanie \mathbb{C}^2 na pierwszą oś: $\pi_1(x, y) = x$. Zdefiniujemy pomocniczy ciąg charakterystyczny $((n'_1, m'_1), \dots, (n'_{\beta_h}, m'_{\beta_h}))$ krzywej \mathbf{V} . Jego konstrukcja jest analogiczna do konstrukcji ciągu $((m_1, n_1), \dots, (m_h, n_h))$ z tą różnicą, że dopuszczamy tutaj równość $n'_i = 1$. Jeżeli $y(t) = a_{p_1}t^{p_1} + a_{p_2}t^{p_2} + \dots$, $a_{p_i} \neq 0$, to przyjmujemy

$$\begin{aligned} \frac{p_1}{n} &= \frac{m'_1}{n'_1}, \quad \text{NWD}(m'_1, n'_1) = 1, \\ \frac{p_2}{n} &= \frac{m'_2}{n'_1 n'_2}, \quad \text{NWD}(m'_2, n'_2) = 1, \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{p_{\beta}}{n} &= \frac{m'_{p_{\beta}}}{n'_1 \dots n'_{p_{\beta}}}, \quad \text{NWD}(m'_{p_{\beta}}, n'_{p_{\beta}}) = 1, \end{aligned}$$

gdzie $p_{\beta} = \beta_h$. Zauważmy, że ciąg par charakterystycznych $((m_1, n_1), \dots, (m_h, n_h))$ jest podciągiem $((m'_1, n'_1), \dots, (m'_{p_{\beta}}, n'_{p_{\beta}}))$ oraz $(m_h, n_h) = (m'_{p_{\beta}}, n'_{p_{\beta}})$. Dokładniej, wystarczy usunąć z ciągu $((m'_1, n'_1), \dots, (m'_{p_{\beta}}, n'_{p_{\beta}}))$ te pary dla których $n'_i = 1$. Wykażemy, że węzeł krzywej \mathbf{V} jest równy $T_{(n'_1, m'_1) \dots (n'_{p_{\beta}}, m'_{p_{\beta}})}$. Wówczas na mocy stwierdzenia 2.1 w części II, $T_{(n'_1, m'_1) \dots (n'_{p_{\beta}}, m'_{p_{\beta}})} = T_{(m_1, n_1) \dots (m_h, n_h)}$, co da nam tezę.

Równość $K_{\mathbf{V}} = T_{(n'_1, m'_1) \dots (n'_{p_{\beta}}, m'_{p_{\beta}})}$ wykażemy przez aproksymacje węzła $K_{\mathbf{V}}$ węzłami otrzymanymi przez "obcięcie" parametryzacji Φ . Dokładniej, udowodnimy, że dla dowolnego $i = 1, \dots, p_{\beta}$ obraz odwzorowania

$$\Phi_i(t) := (t^n, a_{p_1}t^{p_1} + \dots + a_{p_i}t^{p_i}), \quad t \in S(\varepsilon^{1/n}),$$

jest węzłem typu $T_{(n'_1, m'_1) \dots (n'_i, m'_i)}$. W szczególności dla $i = p_{\beta}$ obraz $\Phi_{p_{\beta}}$ okręgu $S(\varepsilon^{1/n})$ ma typ $T_{(n'_1, m'_1) \dots (n'_{p_{\beta}}, m'_{p_{\beta}})}$. Następnie zauważymy, że obrazy $\Phi_{p_{\beta}}$ i Φ okręgu $S(\varepsilon^{1/n})$ mają ten sam typ w $\partial P(\varepsilon, \varepsilon)$, a stąd otrzymamy $T_{(n'_1, m'_1) \dots (n'_{p_{\beta}}, m'_{p_{\beta}})} \sim K_{\mathbf{V}}$, co daje tezę.

Rozważmy najpierw przypadek $i = 1$, tzn.

$$\Phi_1(t) = (t^n, a_{p_1}t^{p_1}), \quad t \in S(\varepsilon^{1/n}).$$

Zmniejszając ε możemy założyć, że $|a_{p_1} t^{p_1}| < \varepsilon$ dla $t \in S(\varepsilon^{1/n})$. Obraz Φ_1 jest oczywiście równy obrazowi odwzorowania

$$\Phi_1^{\text{red}}(t) := (t^{n'_1}, a_{p_1} t^{m'_1}), \quad t \in S(\varepsilon^{1/n'_1}),$$

a ten jest węzłem torycznym pierwszego rzędu typu (m'_1, n'_1) . Leży on w torusie $\{(x, y) : |x| = \varepsilon, |y| = |a_{p_1} \varepsilon^{m'_1/n'_1}|\}$. Oznaczmy ten węzeł przez T_1 .

Rozważmy teraz przypadek $i = 2$, tzn.

$$\Phi_2(t) = (t^n, a_{p_1} t^{p_1} + a_{p_2} t^{p_2}), \quad t \in S(\varepsilon^{1/n}).$$

Zmniejszając ε możemy założyć, że $|a_{p_1} t^{p_1} + a_{p_2} t^{p_2}| < \varepsilon$ dla $t \in S(\varepsilon^{1/n})$. Zauważmy, że obraz Φ_2 leży na brzegu tubularnego otoczenia węzła T_1 o promieniu $|a_{p_2} \varepsilon^{p_2/n}|$. Istotnie, dla dowolnego $t \in S(\varepsilon^{1/n})$ mamy $\Phi_2(t) = \Phi_1(t) + (0, a_{p_2} t^{p_2})$ oraz jeśli ε jest dostatecznie małe, to koła o promieniu $|a_{p_2} \varepsilon^{p_2/n}|$ i środkach w punktach $\pi_1^{-1}(x) \cap T_1$, gdzie $|x| = \varepsilon$, zawierają się w kole $K(0, \varepsilon)$ i są parami rozłączne (to ostatnie wynika z faktu, że odległość dowolnych dwóch różnych punktów T_1 w $\pi_1^{-1}(x)$ jest większa lub równa $|a_{p_1}(1 - \rho)t^{p_1}| = |a_{p_1}(1 - \rho)|\varepsilon^{p_1/n}$, gdzie ρ jest pierwiastkiem pierwotnym z jedynki stopnia p_1 oraz z nierówności $p_1 < p_2$). Ponadto obraz Φ_2 jest oczywiście równy obrazowi odwzorowania

$$\Phi_2^{\text{red}}(t) := (t^{n'_1 n'_2}, a_{p_1} t^{m'_1 n'_2} + a_{p_2} t^{m'_2}), \quad t \in S(\varepsilon^{1/n'_1 n'_2}),$$

a ten jest węzłem torycznym drugiego rzędu typu $(n'_1, m'_1) (n'_2, m'_2)$. Oznaczmy ten węzeł przez T_2 . Postępując tak dalej (za każdym razem zmniejszając ε) otrzymamy w końcu, że obraz Φ_{p_β} okręgu $S(\varepsilon^{1/n})$ jest węzłem w $P(\varepsilon, \varepsilon)$ i ma typ $(n'_1, m'_1) \dots (n'_{p_\beta}, m'_{p_\beta})$. Ponadto leży on w brzegu $\partial P(\varepsilon, \varepsilon)$. Oznaczmy ten węzeł przez T_{p_β} .

Pozostaje porównać teraz węzeł T_{p_β} z węzłem $K_{\mathbf{V}}$, czyli obrazy Φ_{p_β} i Φ okręgu $S(\varepsilon^{1/n})$ w $\partial P(\varepsilon, \varepsilon)$. Ponieważ $p_\beta = \beta_h$ więc musimy porównać obrazy Φ_{β_h} i Φ . Mamy

$$\begin{aligned} \Phi_{\beta_h}(t) &= (t^n, a_{p_1} t^{p_1} + \dots + a_{\beta_h} t^{\beta_h}), \quad t \in S(\varepsilon^{1/n}), \\ \Phi(t) &= (t^n, a_{p_1} t^{p_1} + \dots + a_{\beta_h} t^{\beta_h} + \dots), \quad t \in S(\varepsilon^{1/n}). \end{aligned}$$

Dla ustalonego x , $|x| = \varepsilon$, i dowolnego t takiego, że $t^n = x$ mamy

$$\begin{aligned} \pi_1^{-1}(x) \cap T_{\beta_h} &= \{(t^n, a_{p_1} (\rho t)^{p_1} + \dots + a_{\beta_h} (\rho t)^{\beta_h}) : \rho \in U(n)\}, \\ \pi_1^{-1}(x) \cap K_{\mathbf{V}} &= \{(t^n, a_{p_1} (\rho t)^{p_1} + \dots + a_{\beta_h} (\rho t)^{\beta_h} + \dots) : \rho \in U(n)\}, \end{aligned}$$

gdzie $U(n)$ jest zbiorem pierwiastków n -tego stopnia z jedynki. Ponieważ

$$\text{NWD}(n, p_1, \dots, \beta_h) = 1,$$

więc dla wszystkich dostatecznie małych ε każdy z tych zbiorów jest n -elementowy. Istotnie, wykażemy to dla zbioru $\pi_1^{-1}(x) \cap T_{\beta_h}$, gdyż rozumowanie dla zbioru

$\pi_1^{-1}(x) \cap K_{\mathbf{V}}$ jest analogiczne. Gdy dla pewnych $\rho, \tilde{\rho} \in U(n)$, $\rho \neq \tilde{\rho}$, i $t \in S(\varepsilon^{1/n})$ zachodzi

$$a_{p_1} (\rho t)^{p_1} + \dots + a_{\beta_h} (\rho t)^{\beta_h} = a_{p_1} (\tilde{\rho} t)^{p_1} + \dots + a_{\beta_h} (\tilde{\rho} t)^{\beta_h},$$

to

$$a_{p_1} t^{p_1} (\rho^{p_1} - \tilde{\rho}^{p_1}) + \dots + a_{\beta_h} t^{\beta_h} (\rho^{\beta_h} - \tilde{\rho}^{\beta_h}) = 0.$$

Zatem, gdyby ta równość zachodziła dla nieskończenie wielu $t \rightarrow 0$, to

$$\rho^{p_1} - \tilde{\rho}^{p_1} = 0, \dots, \rho^{\beta_h} - \tilde{\rho}^{\beta_h} = 0.$$

Stąd

$$\left(\frac{\rho}{\tilde{\rho}}\right)^{p_1} = 1, \dots, \left(\frac{\rho}{\tilde{\rho}}\right)^{\beta_h} = 1.$$

Z własności pierwiastków z jedynki wnioskujemy, że $\text{NWD}(n, p_1, \dots, \beta_h) > 1$, co sprzeczne z założeniem.

Oznaczmy te punkty następująco

$$\begin{aligned} \pi_1^{-1}(x) \cap T_{\beta_h} &= \{P_\rho : \rho \in U(n)\}, \\ \pi_1^{-1}(x) \cap K_{\mathbf{V}} &= \{\tilde{P}_\rho : \rho \in U(n)\}. \end{aligned}$$

Odległość każdych dwóch różnych punktów P_ρ i $P_{\rho'}$ dla $\rho, \rho' \in U(n)$ i dostatecznie małych ε spełnia nierówność

$$(5) \quad \|P_\rho - P_{\rho'}\| \geq C\varepsilon^{\beta_h/n}.$$

dla pewnej stałej $C > 0$. Istotnie, ponieważ $\rho \neq \rho'$ więc z warunku $\text{NWD}(n, p_1, \dots, \beta_h) = 1$ istnieje p_i takie, że $\rho^{p_i} - \tilde{\rho}^{p_i} \neq 0$. Niech p_{i_0} będzie najmniejszym takim p_i . Wtedy dla dostatecznie małych t mamy

$$\begin{aligned} \|P_\rho - P_{\rho'}\| &= |a_{p_{i_0}} t^{p_{i_0}} (\rho^{p_{i_0}} - \tilde{\rho}^{p_{i_0}}) + \dots + a_{\beta_h} t^{\beta_h} (\rho^{\beta_h} - \tilde{\rho}^{\beta_h})| \\ &\geq |a_{p_{i_0}} t^{p_{i_0}} (\rho^{p_{i_0}} - \tilde{\rho}^{p_{i_0}})| - |a_{p_{i_0+1}} t^{p_{i_0+1}} (\rho^{p_{i_0+1}} - \tilde{\rho}^{p_{i_0+1}}) + \dots + a_{\beta_h} t^{\beta_h} (\rho^{\beta_h} - \tilde{\rho}^{\beta_h})| \\ &\geq \tilde{C}_1 |t^{p_{i_0}}| - \tilde{C}_2 |t^{p_{i_0+1}}| \end{aligned}$$

dla pewnych stałych dodatnich \tilde{C}_1, \tilde{C}_2 . Ponieważ $p_{i_0} < p_{i_0+1}$, więc dla dostatecznie małych t

$$\tilde{C}_1 |t^{p_{i_0}}| - \tilde{C}_2 |t^{p_{i_0+1}}| \geq \frac{\tilde{C}_1}{2} |t^{p_{i_0}}|.$$

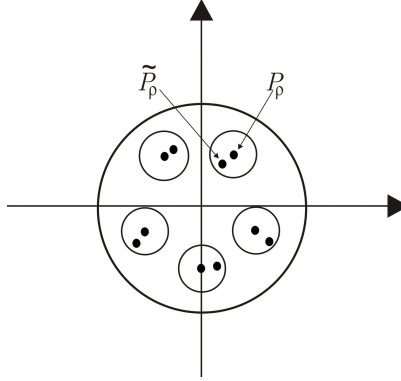
Z kolei $p_{i_0} \leq \beta_h$, a więc

$$\frac{\tilde{C}_1}{2} |t^{p_{i_0}}| \geq \frac{\tilde{C}_1}{2} |t^{\beta_h}| = \frac{\tilde{C}_1}{2} \varepsilon^{\beta_h/n},$$

co daje (5). Z drugiej strony odległość punktów P_ρ i \tilde{P}_ρ dla tego samego $\rho \in U(n)$ i dostatecznie małych ε spełnia nierówność

$$\|P_\rho - \tilde{P}_\rho\| = |a_{\beta_h+1}t^{\beta_h+1}\rho^{\beta_h+1} + \dots| \leq C' |t^{\beta_h+1}| = C'\varepsilon^{(\beta_h+1)/n}.$$

Ponieważ $\beta_h < \beta_h + 1$, więc zmniejszając ε możemy założyć, że punkty \tilde{P}_ρ należą do kół o środkach w P_ρ oraz koła te zawierają się w $K(0, \varepsilon)$ i są parami rozłączne.



Oczywiście punkty P_ρ i \tilde{P}_ρ zależą w sposób ciągły od punktu x . Nietrudno wykazać dla każdego x istnienie homeomorfizmu h_x koła $K(0, \varepsilon)$ na siebie, zależnego w sposób ciągły od x , przekształcającego punkty P_ρ na punkty \tilde{P}_ρ i będącego identyecznością na brzegu. Przedłużając te homeomorfizmy za pomocą identyeczności na pozostałą część brzegu $\partial P(\varepsilon, \varepsilon)$ otrzymamy, że węzeł T_{β_h} jest równoważny węzłowi K_V .

Zatem K_V jest węzłem torycznym typu $((m_1, n_1), \dots, (m_h, n_h))$. ■

3 Równoważność topologiczna krzywych nierozkładalnych

Możemy teraz udowodnić podstawową charakteryzację typów topologicznych krzywych nierozkładalnych. Najpierw podamy potrzebne definicje. Dwie krzywe $V = V(f)$ i $\tilde{V} = V(\tilde{f})$ są *topologicznie równoważne*, gdy istnieją otoczenia U, \tilde{U} zera w \mathbb{C}^2 takie, że pary $(U, V_U(f))$ i $(\tilde{U}, V_{\tilde{U}}(\tilde{f}))$ są homeomorficzne, tzn.

$$(U, V_U(f)) \stackrel{\text{top}}{\approx} (\tilde{U}, V_{\tilde{U}}(\tilde{f})).$$

Oznacza to, że istnieje homeomorfizm $H : U \rightarrow \tilde{U}$ zachowujący punkt 0, który przekształca $V_U(f)$ na $V_{\tilde{U}}(\tilde{f})$. Oczywiście relacja ta jest relacją równoważności w zbiorze wszystkich krzywych. Klasy abstrakcji tej relacji nazywamy *typami topologicznymi krzywych*.

Twierdzenie 3.1 *Dwie osobliwości nierozkładalne mają ten sam typ topologiczny wtedy i tylko wtedy, gdy mają tę samą charakterystykę.*

Dowód. 1. \Leftarrow . Niech \mathbf{V} i $\tilde{\mathbf{V}}$ będą osobliwościami nierozkładalnymi o tej samej charakterystyce $(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_h)$. Stosując liniową zamianę zmiennych w \mathbb{C}^2 możemy założyć, że $\mathbf{V} = \widehat{V_U(f)}$ i $\tilde{\mathbf{V}} = \widehat{V_{\tilde{U}(\tilde{f})}}$, $f, \tilde{f} \in \mathbb{C}\{x\}[y]$ są wielomianami wyróżnionymi, $\text{ord } f = \text{ord } f(0, y) = \text{ord } \tilde{f} = \text{ord } \tilde{f}(0, y)$. Oznaczmy $V := V_U(f)$, $\tilde{V} := V_{\tilde{U}(\tilde{f})}$. Z założenia o wspólnej charakterystyce wynika, że f i \tilde{f} mają ten sam ciąg par charakterystycznych

$$((m_1, n_1), \dots, (m_h, n_h)).$$

Na mocy twierdzenia 2.2 dla ich węzłów mamy

$$\begin{aligned} K_{\mathbf{V}} &\sim T_{(m_1, n_1), \dots, (m_h, n_h)}, \\ K_{\tilde{\mathbf{V}}} &\sim T_{(m_1, n_1), \dots, (m_h, n_h)}. \end{aligned}$$

Zatem $K_{\mathbf{V}} \sim K_{\tilde{\mathbf{V}}}$ jako węzły w $\partial P(\varepsilon, \varepsilon)$ dla dostatecznie małych ε . Stąd pary $(\partial P(\varepsilon, \varepsilon), K_{\mathbf{V}})$ i $(\partial P(\varepsilon, \varepsilon), K_{\tilde{\mathbf{V}}})$ są homeomorficzne. Stąd przedłużając ten homeomorfizm (po odcinkach łączących punkty $\partial P(\varepsilon, \varepsilon)$ z 0) otrzymamy homeomorfizm pary $(P(\varepsilon, \varepsilon), \text{cone}(K_{\mathbf{V}}))$ z parą $(P(\varepsilon, \varepsilon), \text{cone}(K_{\tilde{\mathbf{V}}}))$. Ale na mocy twierdzenia Milnora te pary są homeomorficzne $(P(\varepsilon, \varepsilon), V \cap P(\varepsilon, \varepsilon))$ i odpowiednio $(P(\varepsilon, \varepsilon), \tilde{V} \cap P(\varepsilon, \varepsilon))$. Zatem

$$(P(\varepsilon, \varepsilon), V \cap P(\varepsilon, \varepsilon)) \stackrel{\text{top}}{\approx} (P(\varepsilon, \varepsilon), \tilde{V} \cap P(\varepsilon, \varepsilon)).$$

Stąd po ograniczeniu tego homomorfizmu do wnętrza $P(\varepsilon, \varepsilon)$ otrzymamy

$$(\text{Int } P(\varepsilon, \varepsilon), V \cap \text{Int } P(\varepsilon, \varepsilon)) \stackrel{\text{top}}{\approx} (\text{Int } P(\varepsilon, \varepsilon), \tilde{V} \cap \text{Int } P(\varepsilon, \varepsilon)),$$

czyli \mathbf{V} i $\tilde{\mathbf{V}}$ są topologicznie równoważne.

2. \Rightarrow . Załóżmy, że krzywe \mathbf{V} i $\tilde{\mathbf{V}}$ są topologicznie równoważne. Stosując liniową zamianę zmiennych w \mathbb{C}^2 możemy założyć, że $\mathbf{V} = \widehat{V_U(f)}$, $\tilde{\mathbf{V}} = \widehat{V_{\tilde{U}(\tilde{f})}}$ gdzie $f, \tilde{f} \in \mathbb{C}\{x\}[y]$ są wielomianami wyróżnionymi oraz

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= (t^n, \varphi(t)), \quad \text{ord } \varphi > n, \quad t \in K, \\ \tilde{\Phi}(t) &= (t^m, \tilde{\varphi}(t)), \quad \text{ord } \tilde{\varphi} > m, \quad t \in \tilde{K}, \end{aligned}$$

są ich parametryzacjami Puiseux w U i \tilde{U} . Oznaczmy $V := V_U(f)$, $\tilde{V} := V_{\tilde{U}(\tilde{f})}$. Niech $((m_1, n_1), \dots, (m_g, n_g))$, $((\tilde{m}_1, \tilde{n}_1), \dots, (\tilde{m}_h, \tilde{n}_h))$ będą parami charakterystycznymi \mathbf{V} i $\tilde{\mathbf{V}}$ "odczytanymi" z parametryzacji Φ i $\tilde{\Phi}$. Na mocy tw. 2.2

$$\begin{aligned} K_{\mathbf{V}} &\sim T_{(m_1, n_1), \dots, (m_g, n_g)}, \\ K_{\tilde{\mathbf{V}}} &\sim T_{(\tilde{m}_1, \tilde{n}_1), \dots, (\tilde{m}_h, \tilde{n}_h)}. \end{aligned}$$

Wykażemy teraz, że grupy węzłów (zob. część I) $\pi(K_{\mathbf{V}})$ i $\pi(K_{\tilde{\mathbf{V}}})$ są izomorficzne. Z założenia \mathbf{V} i $\tilde{\mathbf{V}}$ są topologicznie równoważne. Zatem, zmniejszając ewentualnie U i \tilde{U} , istnieje homeomorfizm $F : U \rightarrow \tilde{U}$ przeprowadzający $V_U(f)$ na $V_{\tilde{U}}(\tilde{f})$. Istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że $P(\varepsilon, \varepsilon) \subset U$. Załóżmy, że $\varepsilon < \tilde{\varepsilon}$, gdzie $\tilde{\varepsilon}$ jest promieniem policylindra, występującym w twierdzeniu Milnora, "dobrym" zarówno dla \mathbf{V} jak i dla $\tilde{\mathbf{V}}$.

Weźmy r_1, r_2, r_3, r_4 takie, że

$$0 < r_2 < r_1 < \varepsilon, \quad 0 < r_4 < r_3 < \varepsilon$$

oraz

$$F(P(r_4, r_4)) \subset P(r_2, r_2) \subset F(P(r_3, r_3)) \subset P(r_1, r_1) \subset \tilde{U}.$$

Stąd

$$F(P(r_4, r_4)) \setminus \tilde{V} \subset P(r_2, r_2) \setminus \tilde{V} \subset F(P(r_3, r_3)) \setminus \tilde{V} \subset P(r_1, r_1) \setminus \tilde{V}.$$

Te inkluzje indukują ciąg homomorfizmów grup podstawowych tych zbiorów

$$\pi_1(F(P(r_4, r_4)) \setminus \tilde{V}) \xrightarrow{f_4} \pi_1(P(r_2, r_2) \setminus \tilde{V}) \xrightarrow{f_3} \pi_1(F(P(r_3, r_3)) \setminus \tilde{V}) \xrightarrow{f_2} \pi_1(P(r_1, r_1) \setminus \tilde{V}).$$

Oczywiście złożenie $f_3 \circ f_2$, indukowane włożeniem $P(r_2, r_2) \setminus \tilde{V} \hookrightarrow P(r_1, r_1) \setminus \tilde{V}$, jest izomorfizmem na mocy Lematu 2.1. Ponieważ F jest homeomorfizmem U na \tilde{U} przeprowadzającym V na \tilde{V} , więc

$$\begin{aligned} \pi_1(F(P(r_4, r_4)) \setminus \tilde{V}) &\cong \pi_1(P(r_4, r_4) \setminus V), \\ \pi_1(F(P(r_3, r_3)) \setminus \tilde{V}) &\cong \pi_1(P(r_3, r_3) \setminus V). \end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy ciąg homomorfizmów

$$\pi_1(P(r_4, r_4) \setminus V) \xrightarrow{\tilde{f}_4} \pi_1(P(r_2, r_2) \setminus \tilde{V}) \xrightarrow{\tilde{f}_3} \pi_1(P(r_3, r_3) \setminus V) \xrightarrow{\tilde{f}_2} \pi_1(P(r_1, r_1) \setminus \tilde{V})$$

w którym złożenia (indukowane włożeniami) $\tilde{f}_3 \circ \tilde{f}_2$ i $\tilde{f}_2 \circ \tilde{f}_1$ są izomorfizmami. Stąd łatwo sprawdzamy, że homomorfizm \tilde{f}_2 jest też izomorfizmem. Na mocy Lematu 2.1

$$\begin{aligned} \pi_1(P(r_3, r_3) \setminus V) &\cong \pi(\mathbf{V}), \\ \pi_1(P(r_2, r_2) \setminus \tilde{V}) &\cong \pi(\tilde{\mathbf{V}}), \end{aligned}$$

a więc $\pi(\mathbf{V}) \cong \pi(\tilde{\mathbf{V}})$. Stąd ich wielomiany Aleksandera $A(K_{\mathbf{V}})$ i $A(K_{\tilde{\mathbf{V}}})$ są równe. Ale na mocy tw. 2.2 $K_{\mathbf{V}} = T_{(m_1, n_1), \dots, (m_g, n_g)}$ oraz $K_{\tilde{\mathbf{V}}} = T_{(\tilde{m}_1, \tilde{n}_1), \dots, (\tilde{m}_h, \tilde{n}_h)}$, co implikuje

$$A(T_{(m_1, n_1), \dots, (m_g, n_g)}) = A(T_{(\tilde{m}_1, \tilde{n}_1), \dots, (\tilde{m}_h, \tilde{n}_h)}).$$

Ponieważ dla par charakterystycznych $((m_1, n_1), \dots, (m_g, n_g))$, $((\tilde{m}_1, \tilde{n}_1), \dots, (\tilde{m}_h, \tilde{n}_h))$ krzywych \mathbf{V} i $\tilde{\mathbf{V}}$ spełnione są nierówności (4), więc na mocy twierdzenia 2.10 w części II dostajemy, że $g = h$ i $(m_1, n_1), \dots, (m_g, n_g) = (\tilde{m}_1, \tilde{n}_1), \dots, (\tilde{m}_h, \tilde{n}_h)$. Zatem charakterystyki \mathbf{V} i \mathbf{V}' są identyczne. ■

References

- [BK] Brieskorn E., Knörrer H., *Plane Algebraic Curves*, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Stuttgart, 1986.
- [KP] Krasieński T., Płoski A., *Krzywe algebraiczne*. Maszynopis.
- [Kr1] Krasieński T., *Krzywe a węzły I. Węzły toryczne pierwszego rzędu*. Materiały na XXXII Konf. Szkol. z Geometrii Analitycznej i Algebraicznej Zespólonej. Wydawnictwo UŁ 2011, 23–46 (<http://konfroi.math.uni.lodz.pl/>).
- [Kr2] Krasieński T., *Krzywe a węzły II. Węzły toryczne wyższych rzędów*. Materiały na XXXIII Konf. Szkol. z Geometrii Analitycznej i Algebraicznej Zespólonej. Wydawnictwo UŁ 2012, 33–49. (<http://konfroi.math.uni.lodz.pl/>).
- [L] Łojasiewicz S., *Wstęp do Geometrii Analitycznej Zespólonej*. PWN, Warszawa 1988.
- [M] Milnor J., *Singular Points of Complex Hypersurfaces*. Princeton University Press, Princeton 1968.
- [P] Pham P., *Singularities des Courbes Planes*. Cours de 3e cycle, Faculte des Sciences de Paris, Anne Universitaire 1969-1970.
- [W] Wall C. T. C., *Singular Points of Plane Curves*. Cambridge University Press 2004.

CURVES AND KNOTS III. KNOTS OF ANALYTIC IRREDUCIBLE CURVES

Summary. In parts I and II of the article we have described torus knots of the first and respectively higher orders. In this part we present how they are related to local analytic irreducible curves in \mathbb{C}^2 .

WYDZIAŁ MATEMATYKI I INFORMATYKI, UNIWERSYTET ŁÓDZKI, 90-238 ŁÓDŹ, UL. BANACHA 22

E-mail address: krasinsk@uni.lodz.pl

Łódź, 7 – 11 stycznia 2013 r.

