MATERIAŁY XXVI KONFERENCJI SZKOLENIOWEJ Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ ZESPOLONEJ

2005 **Łódź** **str. 21**

PUNKTOWA CHARAKTERYZACJA FUNKCJI WIELOMIANOWYCH

Wojciech Kozłowski, Szymon Głąb (Łódź)

1 Wprowadzenie

Ustalmy spójną n-wymiarową rozmaitość różniczkową M. Niech TM i $T^\star M$ oznaczają odpowiednio wiązkę styczną i kostyczną do M. Niech $\xi = (E, M, \pi : E \to M)$ będzie wiązką wektorową nad M. Oznaczmy symbolem $\Gamma(M, E)$ przestrzeń liniową wszystkich gładkich cięć wiązki ξ tzn. odwzorowań gładkich $s : M \to E$ takich, że $\pi \circ s = \mathrm{id}_M$.

Przypomnijmy, że koneksją w wiązce ξ nazywamy dowolne odwzorowanie liniowe $\nabla : \Gamma(M, E) \to T^\star M \otimes E$ spełniające warunek Leibnitza: $\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla s$, dla dowolnych $s \in \Gamma(M, E)$ i $f \in C^\infty(M)$. W szczególności, gdy $E = TM$, ∇ nazywamy koneksją afiniczną, natomiast parę (M, ∇) rozmaitością afiniczną.

Niech (M, ∇) będzie rozmaitością afiniczną. Koneksja ∇ rozszerza się (w sposób naturalny) do koneksji w każdej wiązce tensorowej $T^k_l = (T^\star M)^{\otimes k} \otimes (TM)^{\otimes l}$. Będziemy pisać T^k zamaist T^k_0. Ponadto T^0 będziemy identyfikowć z wiązką trywialną $M \times \mathbb{R}$. W szczególności, gdy $E = T^k$ oraz $\omega \in \Gamma(M, T^k)$ wtedy $\nabla\omega \in \Gamma(M, T^{k+1})$. Jeżeli $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ jest mapą na M, $\partial_i = \partial/\partial\varphi_i$ oraz $\Gamma^k_{i,j}$ są współczynnikami koneksji ∇ w mapie φ tzn. $\nabla_{\partial_i}\partial_j = \sum_{k=1}^n \Gamma^k_{i,j}\partial_k$, wtedy współczynniki $\nabla\omega$ w mapie φ dane są wzorem

$$(\nabla\omega)_{i_0,i_1,\dots,i_k} = \partial_{i_0}\omega_{i_1,\dots,i_k} - \sum_{\nu=1}^{k}\sum_{l=1}^{n}\Gamma^l_{i_0,i_\nu}\omega_{i_1,\dots,i_{\nu-1},l,i_{\nu+1},\dots,i_k}. \tag{1}$$

Połóżmy $\nabla^k = \nabla\circ\cdots\circ\nabla$ (k-razy). Ponieważ każdą funkcję gładką można identyfikować w cięciem wiązki trywialnej T^0, zatem $\nabla^k f \in \Gamma(M, T^k)$

Niech $\mathcal{P}(M,\nabla)\{f \in C^\infty(M) : \nabla^k f = 0, \text{ dla pewnego k}\}$. Elementy $\mathcal{P}(M,\nabla)$ nazywamy funkcjami ∇-*płaskimi*. Ponieważ koneksja jest operatorem różniczkowym, $\mathcal{P}(M,\nabla)$ jest pierścieniem przemiennym z jedynką. Okazuje się (zob. [Kz]), że $\mathcal{P}(M,\nabla)$ posiada własności analogiczne do pierścienia wielomianów $\mathbb{R}[t_1,\dots,t_n]$. Mianowicie: $\mathcal{P}(M,\nabla)$ jest dziedziną całkowitości, jeżeli (M,g) jest zupełną rozmaitością riemannowską natomiast ∇ koneksją Leviego-Civity, wtedy każda funkcja ∇-płaska i ograniczona na (M,∇) jest stała, w szczególności każda funkcja ∇-płaska na zwartej rozmaitości riemannowskiej jest stała. Ponadto zachodzi następujące twierdzenie (zob. [Kz]):

> Niech (M,∇) będzie spójną, rzeczywistą analityczną rozmaitością afiniczną i $F \in C^\infty(M)$. Jeżeli dla dowolnego $x \in M$ istnieje $k = k(x) \geq 0$ takie, że $(\nabla^k F)(x) = 0$, wtedy F jest ∇-płaska i analityczna.

Zauważmy, że w szczególnym przypadku, gdy $M = G$ jest obszarem w $\mathbb{R}^n$ natomiast ∇ jest kanoniczną koneksją afiniczną na G tzn. $\Gamma^l_{i,j} = 0$, wtedy jako konsekwencję wzoru (1) dostajemy, że dla dowolnej $F \in C^\infty(G)$ i $x \in G$, $(\nabla^k F)(x) = (D^k F)(x)$, gdzie D oznacza różniczkę funkcji F. Zatem $F \in \mathcal{P}(G,\nabla)$ dokładnie wtedy, gdy F jest funkcją wielomianową na G. Mamy zatem następujące

Twierdzenie 1 *Niech $F \in C^\infty(G)$. Jeżeli dla dowolnego $x \in G$ istnieje $k = k(x) \geq 0$ takie, że $(D^k F)(x) = 0$, to F jest funkcją wielomianową na G.*

Twierdzenie 1 wydaje się interesujące samo w sobie. Udowodnimy je na gruncie elementarnej analizy. W tym celu wykorzystamy następujący

Lemat 1 *Niech I będzie przedziałem otwartym w $\mathbb{R}$ i $f \in C^\infty(I)$. Jeżeli dla dowolnego $x \in I$ istnieje $k = k(x) \geq 0$ takie, że $f^{(k)}(x) = 0$, wtedy f jest funkcją wielomianową na I.*

Treść powyższego lematu pojawiła się m.in. jako zadanie na jednym z konkursów matematycznych dla studentów. Ponieważ nie znaleźliśmy w literaturze miejsca w którym można odnaleźć dowód lematu 1, przedstawimy go w kolejnym paragrafie.

2 Dowód

Zacznijmy od wprowadzenia następującej, wygodnej notacji. Jeżeli $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1,\dots,x_n)$ i $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ jest wielowskaźnikiem, wtedy $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$,

$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ oraz $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$. Ponadto przyjmujemy, że stopień wielomianu zerowego jest równy $-\infty$.

W dowodzie będziemy korzystać z twierdzenia Baire'a w następującym sformułowaniu (zob. [He] Lemma 3.1):

> Niech $X \neq \emptyset$ będzie lokalnie zwartą przestrzenią Hausdorffa. Jeżeli $X = \bigcup_{k=0}^{\infty} X_k$, gdzie zbiory X_k są domknięte, wtedy istnieje k_0 takie, że $\mathrm{int} X_{k_0} \neq \emptyset$.

W szczególności twierdzenie Baire'a może być zastosowane w sytuacji, gdy X jest domkniętym podzbiorem przedziału otwartego.

Dowód lematu. Niech V będzie otwartym podzbiorem przedziału I zdefiniowanym w następujący sposób: $x \in V$, gdy istnieje $k \geq 0$ takie, że $f^{(k)} = 0$ w pewnym otwartym otoczeniu punktu x. Oczywiście f jest funkcją wielomianową na każdej składowej zbioru V. Należy pokazać, że $V = I$.

Zauważmy najpierw, że V jest gęstym podzbiorem I. Istotnie, niech $X \neq \emptyset$ będzie otwartym podzbiorem I. Dla dowolnego $k \geq 0$ zbiór $X_k = \{x \in X : f^{(k)}(x) = 0\}$ jest domknięty w X oraz $\bigcup_{k=0}^{\infty} X_k = X$. Na mocy twierdzenia Baire'a istnieje k_0 takie, że $\emptyset \neq \mathrm{int}_X X_{k_0} = \mathrm{int}_I X_{k_0}$.

Przypuśćmy, że $E = I \setminus V \neq \emptyset$. Zauważmy, że E jest w sobie gęsty. Wynika to z następującej obserwacji: jeżeli h jest funkcją gładką zdefiniowaną na przedziale otwartym J, $x \in J$, i obcięcie h do każdej składowej spójności zbioru $J \setminus \{x\}$ jest funkcją wielomianową to h jest funkcją wielomianową na J. Dla dowolnego $k \geq 0$ zbiór $E_k = \{x \in E : f^{(k)}(x) = 0\}$ jest domknięty w E, $\bigcup_{k=0}^{\infty} E_k = E$ oraz E jest lokalnie zwarty (jako domknięty podzbiór przedziału I) zatem na mocy twierdzenia Baire'a istnieją $k_0 \geq 0$ i przedział otwarty $I_0 \subset I$ takie, że $\emptyset \neq I_0 \cap E \subset \mathrm{int}_E E_{k_0}$. Ponieważ każdy element zbioru $\mathrm{int}_E E_{k_0}$ jest jego punktem skupienia, możemy założyć, że $I_0 = (x_1, x_2)$, gdzie $x_1, x_2 \in \mathrm{int}_E E_{k_0}$. Weźmy teraz dowolną składową spójności S zbioru $I_0 \setminus E_{k_0}$. Niech $S = (s_1, s_2)$, gdzie $x_1 \leq s_1 < s_2 \leq x_2$ i $s_1, s_2 \in E_{k_0}$. Pokażemy, że $f|S$ jest funkcją wielomianową stopnia $< k_0$. Możemy założyć, że $f|S$ nie jest funkcją zerową. Niech $d = \deg(f|_S)$. Wtedy $f^{(d)}(s_1) = f^{(d)}(s_2) \neq 0$. Z drugiej strony, ponieważ każdy element x zbioru $\mathrm{int}_E E_{k_0}$ jest jego punktem skupienia, $f^{(k)}(x) = 0$ dla $k \geq k_0$. W szczególności $f^{(k)}(s_1) = f^{(k)}(s_2) = 0$ dla $k \geq k_0$. Zatem $d < k_0$. Oznacza to, że $\emptyset \neq I_0 \cap E \subset V$. Otrzymaliśmy sprzeczność z przypuszczeniem, że $E \neq \emptyset$. $\square$

Dowód twierdzenia 1. Załóżmy najpierw, że G jest kulą otwartą. Z twierdzenia Baire'a wnioskujemy, że istnieją punkt $x_0 \in G$ i $K \geq 0$ takie, że $D^K F \equiv 0$ w pewnym otwartym otoczeniu x_0.

Niech $x \in G$. Połóżmy $f(t) = F(x_0 + t(x - x_0))$. Oczywiście f jest zdefiniowana w pewnym przedziale otwartym I, $[0,1] \subset I$ oraz $f \in C^\infty(I)$. Stosując regułę łańcucha dostajemy

$$f^{(k)}(t_0) = \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} \frac{\partial^k F}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} (t_0(x - x_0) + x_0)(x - x_0)_{i_1} \cdots (x - x_0)_{i_k}.$$

Z powyższych rozważań i lematu 1 wynika natychmiast, że f jest funkcją wielomianową na I stopnia $< K$. Możemy założyć, że $K > 0$. Oczywiście $f(1) = f(0) + (1/1!)f'(0) + \cdots + (1/(K-1)!)f^{(K-1)}(0)$. Zatem

$$F(x) - F(x_0) \quad = \sum_{0<|\alpha|<K} \frac{1}{\alpha!}(D^\alpha F)(x_0)(x - x_0)^\alpha.$$

ponieważ x był wybrany dowolnie, F jest funkcją wielomianową na G stopnia $< K$.

Załóżmy teraz, że G jest dowolnym obszarem. Niech $\{G_j\}_{j=1}^{\infty}$ będzie pokryciem otwarym obszaru G kulami. Z pierwszej części dowodu wynika, że dla dowolnego j istnieje $K_j \geq 0$ takie, że $F|G_j$ jest funkcją wielomianową stopnia $< K_j$. Ponieważ G jest spójny, F jest funkcją wielomianową na G stopnia $< \min_j K_j$. □

References

[He] S. Helgason, *Einstein Manifolds*, American Mathematical Society, 2001.

[Kz] W. Kozłowski, ∇-*flat functions on manifolds*, Annales Polonici Mathematici, (przyjęta do druku).

Pointwise characterization of polynomial functions

In this paper we give an affirmative answer to the following question. Let F be a smooth function defined in a domain $G \subset \mathbb{R}^n$. Suppose that for each $x \in G$ there exists $k = k(x)$ such that $D^k F(x) = 0$. Is F a polynomial function?

Łódź, 10 – 14 stycznia 2005 r.