**MATERIAŁY XXIV KONFERENCJI SZKOLENIOWEJ
Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ
ZESPOLONEJ**

2003 **Łódź** **str. 17**

WARTOŚCI KRYTYCZNE DOWOLNEJ POCHODNEJ FUNKCJI CAŁKOWITEJ MOGĄ BYĆ GĘSTE W $\mathbb{C}$

Wojciech Kozłowski (Łódź)

Konsekwencją słynnego twierdzenia Sarda z roku 1942 (patrz [2] tw. 7.4 lub [3] tw. 1.4.6) jest to, że zbiór wartości krytycznych odwzorowania holomorficznego ma miarę Lebesgue'a równą zero. Z drugiej strony, z twierdzenia o identyczności wynika, że zbiór wartości krytycznych funkcji holomorficznej jednej zmiennej zespolonej jest co najwyżej przeliczalny.

Powstaje zatem naturalne pytanie "jak duży" może być zbiór wartości krytycznych funkcji holomorficznej : Czy może być to zbiór gęsty na płaszczyźnie zespolonej? Pozytywną odpowiedź na to pytanie można znaleźć w pracy [4].

Niniejsza praca zawiera wzmocnienie tego wyniku. Pokazany w niej został przykład funkcji całkowitej takiej, że zbiór wartości krytycznych tej funkcji i jej dowolnej pochodnej jest gęsty na płaszczyźnie zespolonej.

Twierdzenie 1. *Istnieje funkcja całkowita, o tej własności, że zbiór jej wartości krytycznych, oraz zbiór wartości krytycznych jej dowolnej pochodnej jest gęsty na płaszczyźnie zespolonej.*

D o w ó d. Niech $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie zbiorem gęstym w $\mathbb{C}$.

Dla $k, n \in \mathbb{N}$, połóżmy

$$\begin{aligned} K_n &= \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant n\}, \\ B_{n,k} &= \{z \in \mathbb{C} : |z - (n + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^i})| \leqslant \frac{1}{2^{2+k}}\}, \quad \text{dla } k \leqslant n, \\ D_{n,k} &= \{z \in \mathbb{C} : |z - (n + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^i})| \leqslant \frac{1}{2^{3+k}}\}, \quad \text{dla } k \leqslant n, \\ Q_{n,k}(z) &= \frac{w_n}{(k-1)!} z^{k-1} + \frac{2^{3+k}}{(k+1)!n}(z - (n + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^i}))^{k+1}, \quad \text{dla } k \leqslant n. \end{aligned}$$

Ponieważ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zbiór $K_n \cup B_{n,1} \cup ... \cup B_{n,n}$ jest zwarty i nie rozcina płaszczyzny, zatem, na mocy twierdzenia Rungego, istnieje wielomian P_n, taki że

$$|P_n(z)| < \frac{1}{2^{n+2}} \frac{1}{n!(2^{3+n})^{n+1}}, \quad \text{dla } z \in K_n,$$

$$|(P_1 + ... + P_n)(z) - Q_{n.k}(z)| < \frac{1}{2^{n+2}} \frac{1}{n!(2^{3+n})^{n+1}}, \quad \text{dla } z \in B_{n,k}.$$

Wprost z powyższego, i określenia zbiorów K_n, $n \in \mathbb{N}$, wynika natychmiast, że funkcja

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} P_n,$$

jest całkowita.

Ponieważ $B_{n,k} \subset K_m$, dla dowolnych $m > n \geqslant k$, zatem dla każdego $z \in B_{n,k}$, mamy

$$\begin{aligned} |f(z) - Q_{n,k}(z)| &\leqslant |(P_1 + ... + P_n)(z) - Q_{n.k}(z)| + \sum_{m=n+1}^{\infty} |P_m(z)| \\ &< \frac{1}{2^{n+2}} \frac{1}{n!(2^{3+n})^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} \frac{1}{n!(2^{3+n})^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{n!(2^{3+n})^{n+1}} \end{aligned}$$

Zauważmy jeszcze, że

$$\begin{aligned} Q_{n,k}^{(k-1)}(z) &= w_n + \frac{2^{2+k}}{n}(z - (n + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^i}))^2, \\ Q_{n,k}^{(k)}(z) &= \frac{2^{3+k}}{n}(z - (n + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^i})), \end{aligned}$$

w szczególności, gdy $z \in \partial D_{n,k}$, to $|Q_{n,k}^{(k)}(z)| = 1/n$.

Ustalmy $k = 1, 2, ...,$ i niech $n \geqslant k$. Wtedy na mocy wzoru całkowego Cauchy'ego i twierdzenia o różniczkowaniu całki względem parametru (zastosowanego k razy) otrzymujemy dla dowolnego $z \in D_{n,k}$ następujące oszacowanie

$$\begin{aligned} |f^{(k)}(z) - Q^{(k)}_{n,k}(z)| &= \left| \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{\partial B_{n,k}} \frac{f(\xi) - Q_{n,k}(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} d\xi \right| \\ &\leqslant \frac{k!}{2\pi} 2\pi \frac{1}{2^{2+k}} \frac{1}{(1/2^{3+k})^{k+1}} \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{n!(2^{3+n})^{n+1}} \\ &\leqslant \frac{k!}{2\pi} 2\pi \frac{1}{2^{2+k}} \frac{1}{(1/2^{3+k})^{k+1}} \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{k!(2^{3+k})^{k+1}} \\ &< \frac{1}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

Podobnie pokazujemy, że dla dowolnego $z \in D_{n,k}$

$$|f^{(k-1)}(z) - Q^{(k-1)}_{n,k}(z)| < \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Ostatecznie dla dowolnego $z \in \partial D_{n,k}$ zachodzi nierówność $|f^{(k)}(z) - Q^{(k)}_{n,k}(z)| < |Q^{(k)}_{n,k}(z)|$. Stąd i twierdzenia Rouchégo wynika natychmiast, że funkcja $f^{(k)}$ ma w zbiorze $\operatorname{Int} D_{n,k}$ dokładnie jeden pierwiastek. Oznaczmy go symbolem $z_{n,k}$.

Mamy

$$\begin{aligned} |f^{(k-1)}(z_{n,k}) - w_n| &\leqslant |f^{(k-1)}(z_{n,k}) - Q^{(k-1)}_{n,k}(z_{n,k})| + |Q^{(k-1)}_{n,k}(z_{n,k}) - w_n| \\ &\leqslant \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{n} \frac{1}{2^{4+k}} < \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Ponieważ zbiór $\{w_n\}_{n=1}^{\infty} \setminus \{w_1, ..., w_k\}$ jest gęsty na płaszczyźnie zespolonej, zatem zbiór $\{f^{(k-1)}(z_{n,k})\}_{n=1}^{\infty}$ jest gęsty w $\mathbb{C}$.

To kończy dowód. $\square$

Uwaga. Wykorzystując twierdzenie o możliwości wyczerpania podzbioru otwartego płaszczyzny zespolonej zbiorami zwartymi (patrz [1] lemat 46.1) można udowodnić następujące

Twierdzenie 2. *Dla dowolnego podzbioru otwartego $\mathbb{C}$, istnieje określona na nim funkcja holomorficzna taka, że zbiór jej wartości krytycznych i zbiór wartości krytycznych jej dowolnej pochodnej jest gęsty w $\mathbb{C}$.*

Niech dalej α będzie dwuwskaźnikiem. Korzystając z twierdzenia 1. oraz równań Cauchy'ego-Riemanna otrzymujemy łatwo następujący

Wniosek 1. *Istnieje funkcja harmoniczna $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ taka, że dla dowolnego α zbiór wartośc krytycznych funkcji $u_\alpha = D^\alpha u$ jest gęsty w $\mathbb{R}$.*

Załóżmy, że f jest funkcją całkowitą spełniającą tezę twierdzenia 1. Określmy odwzorowanie $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^k$, $k \leqslant n$, wzorem $F(z_1, \ldots, z_n) = (f(z_1), \ldots, f(z_k))$. Wprost z przyjętych oznaczeń i twierdzenia 1. otrzymujemy następujący

Wniosek 2. *Zbiór wartości krytycznych odwzorowania F jest gęsty w $\mathbb{C}^k$.*

Critical values of any derivative of an entire function can be dense in $\mathbb{C}$

The famous Sard's Theorem implies that the set of critical values of any holomorphic map is of measure zero. On the other hand, the set of critical values of a holomorphic function defined in an open subset of $\mathbb{C}$ is finite or countable, so a natural question is: Can the set of critical values of a holomorphic function be dense in $\mathbb{C}$?

The aim of this paper is to give an affirmative answer to that question. We are able to do more, namely, to construct an entire function, which set of critical values and the sets of critical values of its derivatives are all dense in $\mathbb{C}$.

Chciałbym podziękować panu Stanisławowi Spodziei za Jego pomoc, bez której ta praca by nie powstała.

Literatura

[1] J. Chądzyński, *Wstęp do analizy zespolonej*, PWN, Warszawa 2000.

[2] B. Malgrange, *Ideals of differentiable functions*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay and Oxford Unv. Press 1966.

[3] R. Narasimhan, *Analysis on real and complex manifolds*, North-Holland, Amsterdam 1968.

[4] S. Spodzieja, *Przykład funkcji całkowitej, której zbiór wartości krytycznych jest gęsty w* $\mathbb{C}$, manuskrypt.

Łódź, 6 – 10 stycznia 2003 r.