Sieci dopuszczalne dla zbiorów algebraicznych z silną uogólnioną własnością Markowa

XXXVII Konferencja i Warsztaty "Geometria Analityczna i Algebraiczna"

Agnieszka Kowalska
Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie

11-15 stycznia 2016, Łódź

Własność Markowa

Mówimy, że zwarty podzbiór E przestrzeni $\mathbb{C}^N$ ma *własność Markowa z wykładnikiem m* jeśli istnieje taka stała $M > 0$, że dla każdego wielomianu $P \in \mathbb{C}[z]$,

$$\|\mathrm{grad}\, P\|_E \leqslant M(\deg P)^m \|P\|_E,$$

gdzie $\mathrm{grad}\, P = \left(\frac{\partial P}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial P}{\partial x_N}\right)$, $|\mathrm{grad}\, P| = \left(\sum_{j=1}^{N} \left|\frac{\partial P}{\partial x_j}\right|^2\right)^{1/2}$ i $\|\cdot\|_E$ jest normą supremum na zbiorze E. W skrócie zapisujemy $E \in \mathcal{M}_N(m, M)$.

Wykładnik Markowa

Wykładnikiem Markowa zbioru zwartego $E \subset \mathbb{C}^N$ nazywamy

$$m(E) = \inf\{m > 0 \ : \ \exists M > 0 \ E \in \mathcal{M}_N(m, M)\}$$

Jeśli E nie ma własności Markowa to przyjmujemy $m(E) = \infty$.

Wykładnik Markowa

Wykładnikiem Markowa zbioru zwartego $E \subset \mathbb{C}^N$ nazywamy

$$m(E) = \inf\{m > 0 \ : \ \exists M > 0 \ E \in \mathcal{M}_N(m, M)\}$$

Jeśli E nie ma własności Markowa to przyjmujemy $m(E) = \infty$.

1. Jeśli $E \subset \mathbb{R}^N$, to $m(E) \geqslant 2$.

Wykładnik Markowa

Wykładnikiem Markowa zbioru zwartego $E \subset \mathbb{C}^N$ nazywamy

$$m(E) = \inf\{m > 0 \ : \ \exists M > 0 \ E \in \mathcal{M}_N(m, M)\}$$

Jeśli E nie ma własności Markowa to przyjmujemy $m(E) = \infty$.

1. Jeśli $E \subset \mathbb{R}^N$, to $m(E) \geqslant 2$.
2. Jeśli E jest tłustym, wypukłym, zwartym podzbiorem $\mathbb{R}^N$, to $m(E) = 2$.

Wykładnik Markowa

Wykładnikiem Markowa zbioru zwartego $E \subset \mathbb{C}^N$ nazywamy

$$m(E) = \inf\{m > 0 \ : \ \exists M > 0 \ E \in \mathcal{M}_N(m, M)\}$$

Jeśli E nie ma własności Markowa to przyjmujemy $m(E) = \infty$.

1. Jeśli $E \subset \mathbb{R}^N$, to $m(E) \geqslant 2$.
2. Jeśli E jest tłustym, wypukłym, zwartym podzbiorem $\mathbb{R}^N$, to $m(E) = 2$.
3. Niech $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 < x \leqslant 1, \quad 0 < y \leqslant \exp(-\frac{1}{x})\} \cup \{(0, 0)\}$. Wtedy $m(E) = \infty$ (M. Zerner 1969).

- Let $E_p = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant x^p\}$, gdzie $p \geqslant 1$. Wtedy $m(E_p) = 2p$ (P. Goetgheluck 1980).

- Let $E_p = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant x^p\}$, gdzie $p \geqslant 1$. Wtedy $m(E_p) = 2p$ (P. Goetgheluck 1980).
- Jeśli $E \subset \mathbb{C}^N$ (lub $\mathbb{R}^N$) z $N \geqslant 2$, to własność Markowa nie musi być spełniona z $m(E)$ (M. Baran, L. Białas-Cież, B. Milówka 2013). Dla przykładu

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x| \leqslant 1, \quad |y| \leqslant \varphi(1-|x|)\},$$

gdzie $\varphi(t) = t\left(1 + \ln \frac{1}{t}\right)^{-1}$, $t \in [0,1]$. Zbiór B ma własność Markowa i $m(B) = 2$, ale zbiór B nie ma własności Markowa z wykładnikiem 2.

Twierdzenie (Pawłucki-Pleśniak 1986, Pleśniak 1990)

Jeśli zbiór $E \subset \mathbb{R}^N$ jest C^∞ determinujący (co oznacza, że dla każdego $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ zachodzi implikacja $f|_E = 0 \Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^N \;\; D^\alpha f|_E = 0$) to następujące warunki są równoważne

(i) zbiór E ma własność Markowa;

(ii) zbiór E spełnia warunek (warunek Pleśniaka): istnieją takie dodatnie stałe M' i r, że dla każdego wielomianu p stopnia co najwyżej k, $|p(x)| \leqslant M' \|p\|_E \quad \text{gdy } \mathrm{dist}(x, E) \leqslant \frac{1}{k^r}$;

(iii) Twierdzenie Bernsteina dla zbioru E.

Twierdzenie (Pawłucki-Pleśniak 1986, Pleśniak 1990)

Jeśli zbiór $E \subset \mathbb{R}^N$ jest C^∞ determinujący (co oznacza, że dla każdego $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ zachodzi implikacja $f|_E = 0 \Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^N \;\; D^\alpha f|_E = 0$) to następujące warunki są równoważne

(i) zbiór E ma własność Markowa;

(ii) zbiór E spełnia warunek (warunek Pleśniaka): istnieją takie dodatnie stałe M' i r, że dla każdego wielomianu p stopnia co najwyżej k, $|p(x)| \leqslant M'\|p\|_E \quad \text{gdy } \mathrm{dist}(x,E) \leqslant \frac{1}{k^r}$;

(iii) Twierdzenie Bernsteina dla zbioru E.

Twierdzenie (W. Pleśniak 1990)

Jeśli zbiór E ma własność Markowa, to zbiór E jest $\mathcal{C}^\infty$ determinujący.

Zbiory algebraiczne nie są $\mathcal{C}^\infty$ determinujące, więc nie mają własności Markowa.
Oznaczenia:
Dla $E \subset \mathbb{R}^N$

- $\mathcal{P}(E) = \{f : E \to \mathbb{R} \;:\; f = P|_E \text{ dla pewnego } P \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_N]\}$
- $\deg_* f = \inf\{\deg P \;:\; P \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_N] \text{ i } f = P|_E\}$
- $\mathcal{P}_k(E) = \{f \in \mathcal{P}(E) : \deg_* f \leqslant k\}$

Zbiory algebraiczne nie są $\mathcal{C}^\infty$ determinujące, więc nie mają własności Markowa.
Oznaczenia:
Dla $E \subset \mathbb{R}^N$

- $\mathcal{P}(E) = \{f : E \to \mathbb{R} \ : \ f = P|_E \text{ dla pewnego } P \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_N]\}$
- $\deg_* f = \inf\{\deg P \ : \ P \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_N] \text{ i } f = P|_E\}$
- $\mathcal{P}_k(E) = \{f \in \mathcal{P}(E) : \ \deg_* f \leqslant k\}$

Niech E będzie zbiorem zwartym w $\mathbb{R}^N$.

Definicja

Zbiór E ma *silną uogólnioną własność Markowa* ($\mathcal{M}_s^*$) jeśli:
(a) istnieją takie odwzorowanie liniowe $\Lambda : \mathcal{P}(E) \to \mathbb{R}[x_1, \dots, x_N]$ i stała $b \geqslant 1$, że $\Lambda(f)|_E = f$, $\deg \Lambda(f) \leqslant b \deg_* f$;
(b) istnieją takie stałe $M_1, m_1 > 0$, że dla każdego $f \in \mathcal{P}(E)$,

$$\|D^\alpha \Lambda(f)\|_E \leqslant M_1 (\deg \Lambda(f))^{|\alpha| m_1} \|f\|_E, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^N.$$

Definicja

Zbiór E ma *silną uogólnioną własność Markowa* ($\mathcal{M}_s^*$) jeśli:
(a) istnieją takie odwzorowanie liniowe $\Lambda : \mathcal{P}(E) \to \mathbb{R}[x_1, \dots, x_N]$ i stała $b \geqslant 1$, że $\Lambda(f)|_E = f$, $\deg \Lambda(f) \leqslant b \deg_* f$;
(b) istnieją takie stałe $M_1, m_1 > 0$, że dla każdego $f \in \mathcal{P}(E)$,

$$\|D^\alpha \Lambda(f)\|_E \leqslant M_1 (\deg \Lambda(f))^{|\alpha| m_1} \|f\|_E, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^N.$$

Definicja (Calvi Levenberg 2008, Calvi Białas-Cież 2012)

Mówimy, że ciąg zbiorów A_n, $n \in \mathbb{N}$ jest słabo dopuszczalną siecią dla zbioru zwartego $E \subset \mathbb{R}^N$ jeśli

1. każdy A_n jest skończonym podzbiorem E.
2. istnieje ciąg (M_n) o wzroście wielomianowym (tzn. $\lim_{n\to\infty} M_n^{1/n} = 1$), że dla każdego wielomianu p stopnia co najwyżej n, $\|p\|_E \leqslant M_n \|p\|_{A_n}$.

W przypadku, gdy ciąg (M_n) jest ograniczony, to mówimy, że (A_n) jest siecią dopuszczalną dla zbioru E.

Twierdzenie (T. Beberok, AK 2015)

Jeśli $E \subset \mathbb{R}^N$ ma silną uogólnioną własność Markowa $(\mathcal{M}_s^*)$ z wykładnikiem m, to istnieje sieć dopuszczalna (A_k) dla zbioru E i $\#A_k = O(k^{mN})$.

Twierdzenie (T. Beberok, AK 2015)

Jeśli $E \subset \mathbb{R}^N$ ma silną uogólnioną własność Markowa $(\mathcal{M}_s^*)$ z wykładnikiem m, to istnieje sieć dopuszczalna (A_k) dla zbioru E i $\#A_k = O(k^{mN})$.

Definicja

Zbiór E spełnia *uogólniony warunek Pleśniaka $(\mathcal{P}_\sigma^*)$* (dla pewnego $\sigma \geqslant 0$) jeśli zachodzi (a) i
(c) istnieją takie stałe $m_2, M_2, M_3 > 0$, że

$$\|\Lambda(f)\|_{E_\epsilon} \leqslant M_2 k^\sigma \|f\|_E, \text{ dla } f \in \mathcal{P}_k(E), \ \epsilon \leqslant M_3 k^{-m_2}, \ k \in \mathbb{N}_2.$$

Twierdzenie (T. Beberok, AK 2015)

Jeśli $E \subset \mathbb{R}^N$ ma silną uogólnioną własność Markowa $(\mathcal{M}_s^*)$ z wykładnikiem m, to istnieje sieć dopuszczalna (A_k) dla zbioru E i $\# A_k = O(k^{mN})$.

Definicja

Zbiór E spełnia *uogólniony warunek Pleśniaka $(\mathcal{P}_\sigma^*)$* (dla pewnego $\sigma \geqslant 0$) jeśli zachodzi (a) i
(c) istnieją takie stałe $m_2, M_2, M_3 > 0$, że

$$\|\Lambda(f)\|_{E_\epsilon} \leqslant M_2 k^\sigma \|f\|_E, \text{ dla } f \in \mathcal{P}_k(E), \ \epsilon \leqslant M_3 k^{-m_2}, \ k \in \mathbb{N}_2.$$

Twierdzenie (M.Baran, AK 2014)

$(\mathcal{P}_\sigma^*) \Leftrightarrow (\mathcal{M}_s^*)$.

Problemy:

1. Czy wystarczy w definicji uogólnionej własności Markowa oszacowanie dla pochodnych cząstkowych, żeby zachodził uogólniony warunek Pleśniaka i istniała sieć dopuszczalna?
2. Czy wystarczy styczna nierówność Markowa?

Styczna nierówność Markowa

Zbiór zwarty $K \subset \mathbb{R}^N$ spełnia styczną nierówność Markowa z wykładnikiem l jeśli istnieje taka dodatnia stała M zależna tylko od K że dla każdego wielomianu $p \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_N]$

$$\|D_T p\|_K \leqslant M(\deg p)^l \|p\|_K,$$

gdzie $D_T p$ oznacza pochodną w kierunku wektora jednostkowego ze stożka stycznego i $\|p\|_K = \sup |p|(K)$.

Przykład (L. P. Bos, N. Levenberg, P. Milman, B. A. Taylor 1995)

Niech γ_r krzywa zdefiniowana wzorem $y = x^r$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, gdzie $r \in \mathbb{R}$ i $r \geqslant 1$. Wtedy

1. jeśli $r = \frac{q}{p}$, gdzie $q \geqslant p$, p, q dodatnie naturalne, to γ_r spełnia styczną nierówność z optymalnym wykładnikiem $2p$;
2. jeśli r niewymierne γ_r nie spełnia stycznej nierówności Markowa.

Lemat

Niech K będzie łukiem algebraicznym (semialgebraicznym), który ma analityczną parametryzację

$$\Phi(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_N(t))$$

w otoczeniu $I = [-1, 1]$ takie, że w otoczeniu 0 (0 jest jedynym punktem osobliwym) $\varphi_i(t) = \alpha_{i0} + \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_{in} t^n$ i $\alpha_{12} = 1$. Załóżmy, że istnieje $j \in \{1, \ldots, N\}$, że dla każdego $P \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_N]$, $|D_{\mathcal{T}} P(0)| = |\frac{\partial}{\partial x_j} P(0)|$. Wtedy K spełnia styczną nierówność Markowa z optymalnym wykładnikiem 2.

Przykład

$$K_q = \{(t^2, t^q) : t \in [-1, 1] \text{ i } q \geqslant 2 \text{ nieparzysta}\}.$$

spełniają styczną nierówność Markowa z optymalnym wykładnikiem 2.

Dziękuję za uwagę!

A subset $E \subset \mathbb{R}^N$ is *UPC* if there exist constants $M > 0$, $m \geqslant 1$, $d \in \mathbb{N}$ and a function $h : E \times [0,1] \to \overline{E}$ such that for every $x \in \overline{E}$, $h(x,1) = x$, $h(x,\cdot)$ is a polynomial of degree $\leqslant d$ and

$$\mathrm{dist}(h(x,t), \mathbb{R}^N \setminus E) \geqslant M(1-t)^m \quad \text{dla } (x,t) \in \overline{E} \times [0,1].$$

A subset of $\mathbb{R}^N$ is semialgebraic if it is the union of finitely many subsets of the form

$$\{x \in \mathbb{R}^N \ : \ P(x) = 0 \wedge Q_1(x) > 0 \wedge \ldots \wedge Q_l(x) > 0\},$$

where $l \in \mathbb{N}$ and $P, Q_1, \ldots, Q_l \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_N]$.

Theorem (M. Baran, W. Pleśniak 1997)

Let K be a compact curve in $\mathbb{R}^N$ with an analytic parametrization $\{\phi_j\}$ (with parameters r and α). Then the following conditions are equivalent:

(i) K is semialgebraic;

(ii) There exist positive constants M_1 and δ_0 such that $V_K(\phi_j(\zeta)) \leqslant M_1\delta$ if $dist(\zeta, I) \leqslant \delta \leqslant \delta_0$, $j = 1, \ldots, r$;

(iii) K has property P: there exist positive constants M_2 and C such that for each $j = 1, \ldots, r$ and $p \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_N]$,

$$|p(\phi_j(\zeta))| \leqslant M_2\|p\|_K \quad \text{if } dist(\zeta, I) \leqslant C/\deg p;$$

(iv) K admits a Bernstein type inequality: there exists positive constant M_3 such that for each $j = 1, \ldots, r$ and $p \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_N]$,

$$|(p \circ \phi_j)'(t)| \leqslant M_3(\deg p)\|p\|_K, \quad t \in I.$$