O pewnych faktorialnych własnościach podpierścieni

Piotr Jędrzejewicz
WMiI UMK w Toruniu

XXXVII Konferencja i Warsztaty
„Geometria Analityczna i Algebraiczna"
Łódź, 11 – 15 stycznia 2016 r.

1. Wprowadzenie i motywacje
   - Definicje i oznaczenia
   - Motywacja
   - Cele
2. Dziedziny z rozkładem bezkwadratowym
   - Klasy dziedzin
   - Rozkłady bezkwadratowe
3. Warunki dotyczące podpierścieni
   - $\operatorname{Irr} R \subset \operatorname{Sqf} A$ i $\operatorname{Sqf} R \subset \operatorname{Sqf} A$
   - Warunki faktorialne

Definicje i oznaczenia

pierścień – pierścień przemienny z jedynką

dziedzina – pierścień bez dzielników zera

R_0 – ciało ułamków dziedziny R

R^* – zbiór elementów odwracalnych w R

Definicje i oznaczenia

Irr R – zbiór elementów nierozkładalnych w R

Sqf R – zbiór elementów bezkwadratowych w R

Element nazywamy bezkwadratowym, jeśli nie może być przedstawiony w postaci a^2b, gdzie a jest nieodwaracalny.

Motywacja

k – ciało char. zero

$f_1, \ldots, f_m \in k[x_1, \ldots, x_n], \;\; m \in \{1, \ldots, n\}$

Uogólnienie hipotezy jakobianowej

Jeśli NWD $\left(jac^{f_1,\ldots,f_m}_{x_{j_1},\ldots,x_{j_m}}, 1 \leqslant j_1 < \ldots < j_m \leqslant n\right) = 1$, to $k[f_1, \ldots, f_m]$ jest pierścieniem stałych pewnego k-różniczkowania algebry $k[x_1, \ldots, x_n]$ (tzn. jest algebraicznie domknięte w $k[x_1, \ldots, x_n]$).

PJ, J. Zieliński, *Analogs of Jacobian conditions for subrings*, arXiv: 1601.01508

Motywacja

k – ciało char. zero

$f_1, \ldots, f_m \in k[x_1, \ldots, x_n]$, alg. niezal. nad k

$A = k[x_1, \ldots, x_n]$, $R = k[f_1, \ldots, f_m]$

Twierdzenie

Warunki równoważne:

(i) NWD $\left(jac^{f_1,\ldots,f_m}_{x_{j_1},\ldots,x_{j_m}},\ 1 \leqslant j_1 < \ldots < j_m \leqslant n\right) = 1$,

(ii) Irr $R \subset$ Sqf A,

(iii) Sqf $R \subset$ Sqf A.

Motywacja

PJ, *A characterization of Keller maps*, J. Pure Appl. Algebra 217 (2013), 165–171

M. de Bondt, D. Yan, *Irreducibility properties of Keller maps*, arXiv: 1304.0634.

Motywacja

A – dziedzina z jedn. rozkładu

R – podpierścień A, taki że $R^* = A^*$, $R_0 \cap A = R$

Twierdzenie

Warunki równoważne:

(i) $\operatorname{Sqf} R \subset \operatorname{Sqf} A$,

(ii) dla $x \in A$, $y \in \operatorname{Sqf} A$, jeśli $x^2 y \in R \setminus \{0\}$, to $x, y \in R$.

PJ, J. Zieliński, *Analogs of Jacobian conditions for subrings*, arXiv: 1601.01508

Motywacja

A – dziedzina z jedn. rozkładu

R – podpierścień A, taki że $R^* = A^*$, $R_0 \cap A = R$

Twierdzenie

Jeśli $\operatorname{Sqf} R \subset \operatorname{Sqf} A$, to R jest pierwiastkowo domknięty w A.

R nazywamy pierwiastkowo domkniętym w A, jeśli dla $a \in A$, $n \geqslant 2$: $a^n \in R \Rightarrow a \in R$.

PJ, J. Zieliński, *Analogs of Jacobian conditions for subrings*, arXiv: 1601.01508

Motywacja

A – dziedzina z jedn. rozkładu

R – podpierścień A, taki że $R^* = A^*$

Lemat

Warunki równoważne:

(i) $\operatorname{Irr} R \subset \operatorname{Irr} A$,

(ii) R jest faktorialnie domknięty w A.

R nazywamy faktorialnie domkniętym w A, jeśli dla $x, y \in A$: $xy \in R \setminus \{0\} \Rightarrow x, y \in R$.

Motywacja

Pytanie

Czy warunek $\operatorname{Sqf} R \subset \operatorname{Sqf} A$ w przypadku charakterystyki zero zawsze implikuje algebraiczną domkniętość R w A?

Odpowiedź (H. Brenner): nie.

Motywacja

Pytanie

Kiedy podpierścień R spełniający warunek

$$\operatorname{Irr} R \subset \operatorname{Sqf} A \quad \text{lub} \quad \operatorname{Sqf} R \subset \operatorname{Sqf} A$$

jest algebraicznie domknięty w A?

Cele

1. Zbadanie zależności między własnościami

$$\operatorname{Irr} R \subset \operatorname{Sqf} A \quad \text{i} \quad \operatorname{Sqf} R \subset \operatorname{Sqf} A$$

oraz innymi podobnymi.

Cele

2. Zbadanie warunków faktorialności związanych z powyższymi własnościami, w tym warunku

$$\forall\, x \in A,\ y \in \operatorname{Sqf} A,\ x^2 y \in R \setminus \{0\} \Rightarrow x, y \in R$$

i podobnych.

1. Wprowadzenie i motywacje
   - Definicje i oznaczenia
   - Motywacja
   - Cele
2. Dziedziny z rozkładem bezkwadratowym
   - Klasy dziedzin
   - Rozkłady bezkwadratowe
3. Warunki dotyczące podpierścieni
   - Irr $R \subset$ Sqf A i Sqf $R \subset$ Sqf A
   - Warunki faktorialne

Klasy dziedzin

$\mathcal{PID}$ (principal ideal domains) – ideałów głównych

$\mathcal{UFD}$ (unique factorization domains) – z jednoznacznością rozkładu

$\mathcal{FD}$ (factorization domains) – z rozkładem:

$$\forall a \in A \setminus \{0\}, \quad \exists q_1, \ldots, q_r \in \operatorname{Irr} A, \quad a = q_1 \ldots q_r.$$

$$\mathcal{PID} \subset \mathcal{UFD} \subset \mathcal{FD}$$

P. Clark, *Factorization in integral domains*

Klasy dziedzin

$\mathcal{BFD}$ (bounded factorization domains) – z ograniczonym rozkładem: dla $a \in A$ istnieje $N(a) \in \mathbb{N}$, że

$$a = q_1 \dots q_r,\ q_1, \dots, q_r \in \operatorname{Irr} A \ \Rightarrow\ r \leqslant N(a).$$

Warunek równoważny:

$$a = b_1 \dots b_r,\ b_1 \dots b_r \in R \setminus R^* \ \Rightarrow\ r \leqslant N(a).$$

$$\mathcal{PID} \subset \mathcal{UFD} \subset \mathcal{BFD} \subset \mathcal{FD}$$

Klasy dziedzin

$\mathcal{ACCP}$ (Ascending Chain Condition for Principal ideals) – stabilizacja rosnących ciągów ideałów głównych:

$$(a_1) \subset (a_2) \subset (a_3) \subset \ldots \Rightarrow \exists N (a_N) = (a_{N+1}) = \ldots$$

Równoważnie: nie istnieje nieskończony ciąg a_1, a_2, a_3, $\cdots \in A$, taki że

$$(a_1) \subsetneqq (a_2) \subsetneqq (a_3) \subsetneqq \ldots,$$

Klasy dziedzin

tzn. nie istnieje nieskończony ciąg $b_1, b_2, b_3, \dots \in A \setminus A^*$, taki że

$$a_1 = b_1 a_2 = b_1 b_2 a_3 = b_1 b_2 b_3 a_4 = \dots$$

$$\mathcal{PID} \subset \mathcal{UFD} \subset \mathcal{BFD} \subset \mathcal{ACCP} \subset \mathcal{FD}$$

Klasy dziedzin

$\mathcal{GCD}$ (greatest common divisor) – z NWD:

$$\forall a, b \in A \setminus \{0\} \; \exists d \in A \setminus \{0\} \; d \mid a, d \mid b,$$
$$\forall c \in A \setminus \{0\} \; c \mid a, c \mid b \Rightarrow c \mid d$$

$$\mathcal{PID} \subset \mathcal{UFD} \subset \mathcal{GCD}$$

Klasy dziedzin

$\mathcal{ELD}$ (Euclid Lemma domains) – lemat Euklidesa:

$$\forall c \in \operatorname{Irr} A \ \forall a, b \in A \ (c \mid ab \Rightarrow c \mid a \vee c \mid b)$$

– każdy element nierozkładalny jest pierwszy.

$\operatorname{Prime} A$ – zbiór elementów pierwszych

$\operatorname{Prime} A \subset \operatorname{Irr} A$ w dowolnej dziedzinie A

$\operatorname{Prime} A = \operatorname{Irr} A \Leftrightarrow A \in \mathcal{ELD}$

$$\mathcal{PID} \subset \mathcal{UFD} \subset \mathcal{GCD} \subset \mathcal{ELD}$$

Klasy dziedzin

$$\mathcal{PID} \subset \mathcal{UFD} \subset \mathcal{BFD} \subset \mathcal{ACCP} \subset \mathcal{FD}$$

$$\mathcal{PID} \subset \mathcal{UFD} \subset \mathcal{GCD} \subset \mathcal{ELD}$$

$$\mathcal{FD} \cap \mathcal{ELD} = \mathcal{UFD}$$

$$\mathcal{PID} \subset \mathcal{NOETHER} \subset \mathcal{ACCP}$$

P. Clark, *Factorization in integral domains*

Rozkłady bezkwadratowe

(1) $\forall a \in A \ \ \exists b \in A,\ c \in \operatorname{Sqf} A, \ \ a = b^2 c$

(2) $\forall a \in A \setminus \{0\} \ \ \exists c_0, \ldots, c_n \in \operatorname{Sqf} A$

$$a = c_n^{2^n} c_{n-1}^{2^{n-1}} \ldots c_1^2 c_0$$

(1'), (2') – (1), (2) z jednoznacznością z dokładnością do stowarzyszenia

$A \in \mathcal{ACCP} \Rightarrow (2) \Rightarrow (1)$

Irr $R \subset$ Sqf A i Sqf $R \subset$ Sqf A

A – dowolna dziedzina, $R \subset A$

$$\begin{array}{ccccccc}
\operatorname{Irr} R \subset \operatorname{Irr} A & \Rightarrow & \operatorname{Prime} R \subset \operatorname{Irr} A & \Leftarrow & \operatorname{Prime} R \subset \operatorname{Prime} A & \Leftarrow & \forall_{I \in \operatorname{Spec} R} AI \in \operatorname{Spec} A \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
\operatorname{Irr} R \subset \operatorname{Sqf} A & \Rightarrow & \operatorname{Prime} R \subset \operatorname{Sqf} A & \Leftarrow & \operatorname{Prime} R \subset \operatorname{Rdel} A & \Leftarrow & \forall_{I \in \operatorname{Spec} R} AI \in \operatorname{Rdid} A \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow \\
\operatorname{Sqf} R \subset \operatorname{Sqf} A & \Rightarrow & \operatorname{Rdel} R \subset \operatorname{Sqf} A & \Leftarrow & \operatorname{Rdel} R \subset \operatorname{Rdel} A & \Leftarrow & \forall_{I \in \operatorname{Rdid} R} AI \in \operatorname{Rdid} A
\end{array}$$

PJ, Ł. Matysiak, J. Zieliński, *On some factorial properties of subrings*, w przygotowaniu

Irr $R \subset$ Sqf A i Sqf $R \subset$ Sqf A

A – dziedzina, $\quad \mathrm{Prime}\, A = \mathrm{Irr}\, A, \quad \mathrm{Rdel}\, A = \mathrm{Sqf}\, A, \quad R \subset A$

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Irr}\, R \subset \mathrm{Irr}\, A & \Rightarrow & \mathrm{Prime}\, R \subset \mathrm{Irr}\, A & \Leftarrow & \forall_{I \in \mathrm{Spec}\, R} AI \in \mathrm{Spec}\, A \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
\mathrm{Irr}\, R \subset \mathrm{Sqf}\, A & \Rightarrow & \mathrm{Prime}\, R \subset \mathrm{Sqf}\, A & \Leftarrow & \forall_{I \in \mathrm{Spec}\, R} AI \in \mathrm{Rdid}\, A \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow \\
\mathrm{Sqf}\, R \subset \mathrm{Sqf}\, A & \Rightarrow & \mathrm{Rdel}\, R \subset \mathrm{Sqf}\, A & \Leftarrow & \forall_{I \in \mathrm{Rdid}\, R} AI \in \mathrm{Rdid}\, A
\end{array}
$$

$\operatorname{Irr} R \subset \operatorname{Sqf} A$ i $\operatorname{Sqf} R \subset \operatorname{Sqf} A$

A – dziedzina, $\operatorname{Prime} A = \operatorname{Irr} A$, $\operatorname{Rdel} A = \operatorname{Sqf} A$,

$R \subset A$, $\operatorname{Prime} R = \operatorname{Irr} R$, $\operatorname{Rdel} R = \operatorname{Sqf} R$

$$\begin{array}{ccc}
\operatorname{Irr} R \subset \operatorname{Irr} A & \Leftarrow & \forall_{I \in \operatorname{Spec} R} AI \in \operatorname{Spec} A \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
\operatorname{Irr} R \subset \operatorname{Sqf} A & \Leftarrow & \forall_{I \in \operatorname{Spec} R} AI \in \operatorname{Rdid} A \\
\Uparrow & & \Uparrow \\
\operatorname{Sqf} R \subset \operatorname{Sqf} A & \Leftarrow & \forall_{I \in \operatorname{Rdid} R} AI \in \operatorname{Rdid} A
\end{array}$$

Warunki faktorialne

A – dziedzina z jedn. rozkładu

R – podpierścień A, taki że $R^* = A^*$

Lemat

Warunki równoważne:

(i) $\forall x \in A,\ y \in \operatorname{Sqf} A,\ x^2 y \in R \setminus \{0\} \Rightarrow x, y \in R$

(ii) $\forall s_0, \ldots s_n \in \operatorname{Sqf} A,\ s_n^{2^n} \ldots s_1^2 s_0 \in R \Rightarrow s_0, \ldots s_n \in R$

(iii) $\forall q_1, \ldots q_n \in \operatorname{Irr} A,\ \forall k_1, \ldots k_n \in \mathbb{N},\ q_1^{k_1} \ldots q_n^{k_n} \in R \Rightarrow \forall i\ q_1^{c_1^i} \ldots q_n^{c_n^i} \in R$, gdzie $k_j = c_r^j 2^r + \ldots + c_0^j 2^0$

Warunki faktorialne

Przykład

$q_1^{10} q_2^3 q_3^7 \in R$

$10 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$

$3 = 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$

$7 = 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$

$i = 0$: $q_1^0 q_2^1 q_3^1 = q_2 q_3 \in R$

$i = 1$: $q_1^1 q_2^1 q_3^1 = q_1 q_2 q_3 \in R$

$i = 2$: $q_1^0 q_2^0 q_3^1 = q_3 \in R$

$i = 3$: $q_1^1 q_2^0 q_3^0 = q_1 \in R$

Warunki faktorialne

A – dziedzina z jedn. rozkładu

R – podpierścień A, taki że $R^* = A^*$

Lemat

Warunki równoważne:

(i) $\forall x, y \in A,\ \mathrm{NWD}(x, y) = 1,\ xy \in R \setminus \{0\} \Rightarrow x, y \in R$

(ii) $\forall q_1, \ldots q_n \in \mathrm{Irr}\, A,\ \forall k_1, \ldots k_n \in \mathbb{N},\ q_1^{k_1} \ldots q_n^{k_n} \in R \Rightarrow q_1^{k_1}, \ldots, q_n^{k_n} \in R$

Warunki faktorialne

A – dziedzina z jedn. rozkładu

R – podpierścień A, taki że $R^* = A^*$

Lemat

Warunki równoważne:

(i) $\forall x, y \in A,\ xy \in R \setminus \{0\} \Rightarrow x, y \in R$

(ii) $\forall x, y \in A, \mathrm{NWD}(x, y) = 1,\ \forall k \geqslant 1,\ (x^k y \in R \setminus \{0\} \Rightarrow x, y \in R)$

(iii) $\forall q_1, \dots q_n \in \operatorname{Irr} A,\ \forall k_1, \dots k_n \in \mathbb{N},\ q_1^{k_1} \dots q_n^{k_n} \in R \Rightarrow q_1, \dots, q_n \in R$

Warunki faktorialne

A – dziedzina z jedn. rozkładu

R – podpierścień A, taki że $R^* = A^*$

Lemat

Warunki równoważne:

(i) $\forall x, y \in A, \mathrm{NWD}(x, y) = 1,\ \forall k > 1,\ (x^k y \in R \setminus \{0\} \Rightarrow x, y \in R)$

(ii) $\forall q_1, \ldots q_n \in \mathrm{Irr}\, A,\ \forall k_1, \ldots k_r \in \mathbb{N}, r \leqslant n$ $q_1^{k_1} \ldots q_r^{k_r} q_{r+1} \ldots q_n \in R \Rightarrow q_1, \ldots, q_r, q_{r+1} \ldots q_n \in R$

Warunki faktorialne

A – dziedzina, R – podpierścień A

Lemat

Warunki równoważne:

(i) $\forall x, y \in A,\ xy \in R \setminus \{0\} \Rightarrow x, y \in R$

(ii) $\forall x, y \in A,\ x^2 y \in R \setminus \{0\} \Rightarrow x, y \in R$

(iii) $\forall x, y \in A,\ x^3 y \in R \setminus \{0\} \Rightarrow x, y \in R$

(iv) $\forall x, y \in A,\ (x^2 y \in R \setminus \{0\} \vee x^3 y \in R \setminus \{0\}) \Rightarrow x, y \in R$

(v) $\forall x, y \in A\ \forall k > 1\ (x^k y \in R \setminus \{0\} \Rightarrow x, y \in R)$

(vi) $\forall x, y \in A\ \forall k \geqslant 1\ (x^k y \in R \setminus \{0\} \Rightarrow x, y \in R)$

Warunki faktorialne

A – dziedzina, R – podpierścień A

Lemat

Warunki równoważne:

(i) $\forall x, y \in A,\ xy, x^2y \in R \setminus \{0\} \Rightarrow x, y \in R$

(ii) $\forall x, y \in A,\ x^2y, x^3y \in R \setminus \{0\} \Rightarrow x, y \in R$

(iii) $\forall x, y \in A\ (\forall k \geqslant 1\ x^k y \in R \setminus \{0\}) \Rightarrow x, y \in R)$

(iv) $\forall x, y \in A\ (\forall k > 1\ x^k y \in R \setminus \{0\} \Rightarrow x, y \in R)$

(v) $\forall x, y \in A\ (\exists k_0 \forall k \geqslant k_0\ x^k y \in R \setminus \{0\}) \Rightarrow x, y \in R)$

PJ, Ł. Matysiak, J. Zieliński, *On some factorial properties of subrings*, w przygotowaniu

Dziękuję bardzo za uwagę!