Odpowiedniki warunków jakobianowych dla podpierścieni

Piotr Jędrzejewicz
WMiI UMK w Toruniu

XXXVI Konferencja i Warsztaty
„Geometria Analityczna i Algebraiczna"
Łódź, 5 – 9 stycznia 2015 r.

Różniczkowanie i jego pierścień stałych

Przez pierścień rozumiemy pierścień przemienny z jedynką, dziedziną nazywamy pierścień przemienny z jedynką bez dzielników zera. Jeśli R jest dziedziną, to przez R_0 oznaczamy jej ciało ułamków.

Niech A będzie pierścieniem. Odwzorowanie addytywne $d\colon A \to A$ spełniające warunek $d(fg) = d(f)g + fd(g)$ dla $f, g \in A$ nazywamy różniczkowaniem pierścienia A.

Zbiór $A^d = \{f \in A;\ d(f) = 0\}$ nazywamy pierścieniem stałych różniczkowania d, jest to podpierścień pierścienia A.

Jeśli A jest algebrą nad ciałem k, to różniczkowanie k-liniowe $d\colon A \to A$ nazywamy k-różniczkowaniem. Wówczas A^d jest k-podalgebrą algebry A.

Różniczkowanie algebry wielomianów

Jeśli d jest k-różniczkowaniem algebry wielomianów $k[x_1, \ldots, x_n]$ nad ciałem k, to

$$d(f) = \frac{\partial f}{\partial x_1} d(x_1) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} d(x_n)$$

dla każdego $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$.

Z drugiej strony, dla dowolnych wielomianów $g_1, \ldots, g_n \in k[x_1, \ldots, x_n]$ istnieje dokładnie jedno k-różniczkowanie algebry $k[x_1, \ldots, x_n]$, takie że $d(x_1) = g_1$, $\ldots$, $d(x_n) = g_n$, jest ono określone wzorem

$$d(f) = g_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + g_n \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Charakteryzacja pierścieni stałych

Twierdzenie (Nowicki, 1994)

Niech A będzie skończenie generowaną k-dziedziną, gdzie k jest ciałem charakterystyki zero. Niech R będzie k-podalgebrą algebry A. Następujące warunki są równoważne:

(i) R jest pierścieniem stałych pewnego k-różniczkowania algebry A,

(ii) R jest całkowicie domknięte w A i $R_0 \cap A = R$.

Warunek równoważny dodany przez Daigla:

(iii) R jest algebraicznie domknięte w A.

Charakteryzacja pierścieni stałych

Uwaga

Warunek $R_0 \cap A = R$ jest równoważny temu, że $R = L \cap A$ dla pewnego podciała L ciała A_0.

Definicja

Podpierścień R pierścienia A nazywamy algebraicznie domkniętym w A, jeśli wszystkie elementy pierścienia A algebraiczne nad R należą do R.

Charakteryzacja pierścieni stałych

A. Nowicki, *Polynomial derivations and their rings of constants*, Nicolaus Copernicus University, Toruń 1994, www-users.mat.umk.pl/~anow/ps-dvi/pol-der.pdf.

A. Nowicki, *Rings and fields of constants for derivations in characteristic zero*, J. Pure Appl. Algebra 96 (1994), 47–55.

D. Daigle, *Locally nilpotent derivations*, Lecture notes for the "September School" of Algebraic Geometry, Łukęcin, Poland, September 2003, aix1.uottawa.ca/~ddaigle/Lukecin03/LukecinDaigle.pdf.

Warunek jakobianowy dla 2 wielomianów 3 zmiennych

Niech k będzie ciałem charakterystyki zero. Rozważmy następującą hipotezę.

Hipoteza $JC(2,3,k)$

Dla dowolnych wielomianów $f, g \in k[x,y,z]$, jeśli

$$\mathrm{NWD}\left(\mathrm{jac}^{f,g}_{x,y},\ \mathrm{jac}^{f,g}_{x,z},\ \mathrm{jac}^{f,g}_{y,z}\right) = 1,$$

to $k[f,g]$ jest pierścieniem stałych pewnego k-różniczkowania algebry $k[x,y,z]$.

H. Brenner, PJ, J. Zieliński, *Analogs of Jacobian conditions for subrings*, w przygotowaniu.

Uwaga

Z hipotezy $JC(2,3,k)$ wynika hipoteza jakobianowa dla wielomianów dwóch zmiennych nad k.

Dowód. Załóżmy, że $JC(2,3,k)$ zachodzi i rozważmy wielomiany $f, g \in k[x,y]$, takie że $\mathrm{jac}^{f,g}_{x,y} = 1$.

Mamy:

$$\mathrm{NWD}\left(\mathrm{jac}^{f,g}_{x,y}, \mathrm{jac}^{f,g}_{x,z}, \mathrm{jac}^{f,g}_{y,z}\right) = \mathrm{NWD}(1,0,0) = 1,$$

więc $k[f,g]$ jest algebraicznie domknięte w $k[x,y,z]$, na mocy $JC(2,3,k)$. Wówczas $k[f,g]$ jest również algebraicznie domknięte w $k[x,y]$. Zatem $k[f,g] = k[x,y]$, ponieważ f, g są algebraicznie niezależne nad k.

Różniczkowy NWD wielomianów

Niech k będzie ciałem. Dla m wielomianów $f_1, \ldots, f_m \in k[x_1, \ldots, x_n]$, gdzie $1 \leqslant m \leqslant n$, wprowadźmy oznaczenie

$$\mathrm{RNWD}(f_1, \ldots, f_m) = \mathrm{NWD}\left(jac^{f_1, \ldots, f_m}_{x_{j_1}, \ldots, x_{j_m}};\ 1 \leqslant j_1, \ldots, j_m \leqslant n\right).$$

W szczególności, dla $m = n$:

$$\mathrm{RNWD}(f_1, \ldots, f_n) = \mathrm{jac}(f_1, \ldots, f_n),$$

a dla $m = 1$:

$$\mathrm{RNWD}(f) = \mathrm{NWD}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

Warunek jakobianowy dla m wielomianów n zmiennych

k – ciało char. zero, $1 \leqslant m \leqslant n$

Hipoteza JC(m, n, k)

Dla dowolnych wielomianów $f_1, \dots, f_m \in k[x_1, \dots, x_n]$, jeśli

$$\mathrm{RNWD}(f_1, \dots, f_n) = 1,$$

to $k[f_1, \dots, f_m]$ jest pierścieniem stałych pewnego k-różniczkowania algebry $k[x_1, \dots, x_n]$.

Wielomiany domknięte

Twierdzenie (Nowicki – Nagata 1988, Ayad 2002, Arzhantsev – Petravchuk 2007)

Niech k będzie ciałem, niech $f \in k[x_1, \dots, x_n] \setminus k$, rozważmy warunki:

(i) $k[f]$ jest pierścieniem stałych pewnego k-różniczkowania pierścienia $k[x_1, \dots, x_n]$,

(ii) $k[f]$ jest całkowicie domknięte w $k[x_1, \dots, x_n]$,

(iii) $k[f]$ jest elementem maksymalnym rodziny $\{k[g];\ g \in k[x_1, \dots, x_n]\}$,

(iv) dla pewnego $c \in \overline{k}$ wielomian $f + c$ jest nierozkładalny nad $\overline{k}$,

(v) dla wszystkich, oprócz skończenie wielu, $c \in \overline{k}$ wielomian $f + c$ jest nierozkładalny nad $\overline{k}$.

Wielomiany domknięte

a) Jeśli char $k = 0$, to warunki (i) – (v) są równoważne.

b) Jeśli k jest ciałem doskonałym, to warunki (ii) – (v) są równoważne.

c) Dla dowolnego ciała warunki (ii) oraz (iii) są równoważne.

Definicja

Wielomian spełniający równoważne warunki (ii), (iii) nazywamy wielomianem domkniętym.

Wielomiany domknięte

A. Nowicki and M. Nagata, *Rings of constants for k-derivations in $k[x_1, \ldots, x_n]$*, J. Math. Kyoto Univ. 28 (1988), 111–118.

A. Nowicki, *On the Jacobian equation $J(f, g) = 0$ for polynomials in $k[x, y]$*, Nagoya Math. J. 109 (1988), 151–157.

M. Ayad, *Sur les polynômes $f(X, Y)$ tels que $K[f]$ est intégralement fermé dans $K[X, Y]$*, Acta Arith. 105 (2002), 9–28.

I.V. Arzhantsev, A.P. Petravchuk, *Closed polynomials and saturated subalgebras of polynomial algebras*, Ukrainian Math. J. 59 (2007), 1783–1790.

Uwaga 1.

JC(1, n, k) zachodzi.

Ayad udowodnił następujące twierdzenie w przypadku $n = 2$, ale jego dowód łatwo uogólnić dla dowolnego n.

Twierdzenie (Ayad, 2002)

Jeśli NWD $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = 1$, to f jest wielomianem domkniętym.

Uwaga 2.

Implikacja odwrotna w JC(m, n, k) nie musi zachodzić.

Przykład: $m = 1$, $n = 2$, $f = x^2y \in k[x, y]$.

Mamy:

$$\mathrm{NWD}\left(\frac{\partial x^2y}{\partial x}, \frac{\partial x^2y}{\partial y}\right) = \mathrm{NWD}(2xy, x^2) = x.$$

Z drugiej strony, $k[x^2y]$ jest pierścieniem stałych różniczkowania

$$x\frac{\partial}{\partial x} - 2y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Charakteryzacja endomorfizmów Kellera

Twierdzenie (PJ, 2013)

Niech k będzie ciałem charakterystyki zero. Niech $f_1, \dots, f_n \in k[x_1, \dots, x_n]$. Następujące warunki są równoważne:

(i) $\operatorname{jac}(f_1, \dots, f_n) \in k \setminus \{0\}$,

(ii) dla dowolnego wielomianu nierozkładalnego $w \in k[x_1, \dots, x_n]$ wielomian $w(f_1, \dots, f_n)$ jest bezkwadratowy.

PJ, *A characterization of Keller maps*, J. Pure Appl. Algebra 217 (2013), 165–171.

Charakteryzacja endomorfizmów Kellera

De Bondt i Yan rozszerzyli powyższe twierdzenie o następujący warunek równoważny:

(iii) dla dowolnego wielomianu bezkwadratowego $w \in k[x_1, \ldots, x_n]$ wielomian $w(f_1, \ldots, f_n)$ jest bezkwadratowy.

M. de Bondt, D. Yan, *Irreducibility properties of Keller maps*, arXiv: 1304.0634.

Warunek jakobianowy dla m wielomianów

Twierdzenie

Niech k będzie ciałem charakterystyki zero. Dla dowolnych wielomianów $f_1, \ldots, f_m \in k[x_1, \ldots, x_n]$, gdzie $m \geqslant 1$, następujące warunki są równoważne:

(i) $\mathrm{RNWD}(f_1, \ldots, f_m) = 1$,

(ii) dla dowolnego wielomianu nierozkładalnego $w \in k[x_1, \ldots, x_m]$ wielomian $w(f_1, \ldots, f_m)$ jest bezkwadratowy.

(iii) dla dowolnego wielomianu bezkwadratowego $w \in k[x_1, \ldots, x_m]$ wielomian $w(f_1, \ldots, f_m)$ jest bezkwadratowy.

PJ, *A multidimensional characteristic-free generalization of a lemma of Freudenburg*, w przygotowaniu.

Odpowiednik w terminach podalgebry

Załóżmy, że wielomiany $f_1, \ldots, f_m$ są algebraicznie niezależne nad k. Zauważmy, że wielomian $w \in k[x_1, \ldots, x_m]$ jest nierozkładalny (bezkwadratowy) dokładnie wtedy, gdy $w(f_1, \ldots, f_m)$ jest nierozkładalnym (bezkwadratowym) elementem podalgebry $k[f_1, \ldots, f_m]$. Zatem warunek (ii) możemy przeformułować następująco:

„dla dowolnego wielomianu $w \in k[x_1, \ldots, x_m]$, jeśli w jest nierozkładalny, to $w(f_1, \ldots, f_m)$ jest bezkwadratowy (w $k[x_1, \ldots, x_m]$)",

„dla dowolnego wielomianu $w \in k[x_1, \ldots, x_m]$, jeśli $w(f_1, \ldots, f_m)$ jest nierozkładalny w $k[f_1, \ldots, f_m]$, to $w(f_1, \ldots, f_m)$ jest bezkwadratowy w $k[x_1, \ldots, x_m]$",

„dowolny element nierozkładalny pierścienia $k[f_1, \ldots, f_m]$ jest elementem bezkwadratowym pierścienia $k[x_1, \ldots, x_m]$".

Odpowiednik w terminach podalgebry

Wprowadźmy oznaczenia: $A = k[x_1, \ldots, x_n]$, $R = k[f_1, \ldots, f_m]$. Otrzymujemy wyrażenie odpowiedników warunków jakobianowych w terminach zbiorów elementów nierozkładalnych (Irr) oraz bezkwadratowych (Sqf) odpowiednich pierścieni. Element nazywamy bezkwadratowym, jeśli nie może być przedstawiony w postaci a^2b, gdzie a jest nieodwaracalny.

Twierdzenie

Niech k będzie ciałem charakterystyki zero. Niech $f_1, \ldots, f_m \in k[x_1, \ldots, x_n]$ będą alebraicznie niezależne nad k. Następujące warunki są równoważne:

(i) $\mathrm{RNWD}(f_1, \ldots, f_m) = 1$,

(ii) $\mathrm{Irr}\, R \subset \mathrm{Sqf}\, A$,

(iii) $\mathrm{Sqf}\, R \subset \mathrm{Sqf}\, A$.

Zależności między inkluzjami

Uwaga

Niech A będzie dziedziną z jednoznacznością rozkładu. Rozważmy następujące warunki:

(i) $\operatorname{Irr} R \subset \operatorname{Irr} A$,

(ii) $\operatorname{Sqf} R \subset \operatorname{Sqf} A$,

(iii) $\operatorname{Irr} R \subset \operatorname{Sqf} A$.

Zachodzą następujące implikacje:

$$(\mathrm{i}) \Rightarrow (\mathrm{ii}) \Rightarrow (\mathrm{iii}).$$

Podpierścienie faktorialnie domknięte

Lemat

Niech A będzie dziedziną z jednoznacznością rozkładu. Niech R będzie takim podpierścieniem, że $R^* = A^*$. Następujące warunki są równoważne:

(i) $\operatorname{Irr} R \subset \operatorname{Irr} A$,

(ii) R jest faktorialnie domknięty w A.

Definicja

Podpierścień R nazywamy faktorialnie domkniętym w A, jeśli dla dowolnych $x, y \in A$ zachodzi implikacja:

$$xy \in R \setminus \{0\} \Rightarrow x, y \in R.$$

Podpierścienie bezkwadratowo domknięte

Lemat

Niech A będzie dziedziną z jednoznacznością rozkładu. Niech R będzie takim podpierścieniem, że $R^* = A^*$ i $R_0 \cap A = R$. Następujące warunki są równoważne:

(i) $\operatorname{Sqf} R \subset \operatorname{Sqf} A$,

(ii) dla dowolnych $x \in A$, $y \in \operatorname{Sqf} A$, jeśli $x^2 y \in R \setminus \{0\}$, to $x, y \in R$.

Pytanie

Czy warunek $\operatorname{Sqf} R \subset \operatorname{Sqf} A$ w przypadku charakterystyki zero zawsze implikuje algebraiczną domkniętość R w A?

Odpowiedź (Brenner): nie.

Dziękuję bardzo za uwagę!