Warunki jakobianowe
w charakterystyce dodatniej

k – ciało charakterystyki $p > 0$

$k[x_1, \ldots, x_n]$ – algebra wielomianów

k-różniczkowanie algebry $k[x_1, \ldots, x_n]$:

$$d = g_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + g_n \frac{\partial}{\partial x_n},$$

gdzie $g_1, \ldots, g_n \in k[x_1, \ldots, x_n]$

$k[x_1, \ldots, x_n]^d = \{f \in k[x_1, \ldots, x_n] : \ d(f) = 0\}$ – pierścień stałych

Twierdzenie (Nousiainen)
Dla dowolnych wielomianów $f_1, \ldots, f_n \in k[x_1, \ldots, x_n]$ następujące warunki są równoważne:

(1) istnieją k-różniczkowania $d_1, \ldots, d_n$ pierścienia $k[x_1, \ldots, x_n]$ spełniające warunki $d_i(f_j) = \delta_{ij}$ dla $i, j = 1, \ldots, n$,

(2) istnieją k-różniczkowania $d_1, \ldots, d_n$ pierścienia $k[x_1, \ldots, x_n]$ spełniające warunek $\det(d_i(f_j)) \in k \setminus \{0\}$,

(3) $\mathrm{Jac}(f_1, \ldots, f_n) \in k \setminus \{0\}$,

(4) $k[x_1, \ldots, x_n] = k[x_1^p, \ldots, x_n^p, f_1, \ldots, f_n]$,

(5) $f_1, \ldots, f_n$ stanowią p-bazę pierścienia $k[x_1, \ldots, x_n]$ nad $k[x_1^p, \ldots, x_n^p]$.

H. Niitsuma, *Jacobian matrix and p-basis*,
TRU Mathematics 24 (1988), 19–34.

H. Niitsuma, *Jacobian matrix and p-basis*,
w: *Topics in algebra*, 185–188,
Banach Center Publications, vol. 26, part 2,
PWN, Warszawa 1990.

Definicja. Niech R będzie dziedziną charakterystyki $p > 0$. Niech B będzie podpierścieniem dziedziny R zawierającym $R^p = \{a^p,\ a \in R\}$. Ciąg $z_1, \ldots, z_m$ elementów dziedziny R nazywamy p-bazą R nad B, jeśli R jest B-modułem wolnym i elementy postaci

$$z_1^{\alpha_1} \ldots z_m^{\alpha_m}, \text{ gdzie } \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \{0, \ldots, p-1\},$$

stanowią jego bazę.

Wniosek. Jeśli $z_1, \ldots, z_m$ stanowią p-bazę R nad B, to każdy element $a \in R$ może być jednoznacznie przedstawiony w postaci

$$a = \sum_{0 \leqslant \alpha_1, \ldots, \alpha_m < p} b_\alpha z_1^{\alpha_1} \ldots z_m^{\alpha_m}, \text{ gdzie } b_\alpha \in B.$$

Przykład 1. Elementy $x_1, \ldots, x_n$ stanowią p-bazę:

$k[x_1, \ldots, x_n]$ nad $k[x_1^p, \ldots, x_n^p]$,

$k(x_1, \ldots, x_n)$ nad $k(x_1^p, \ldots, x_n^p)$,

$k[[x_1, \ldots, x_n]]$ nad $k[[x_1^p, \ldots, x_n^p]]$.

Przykład 2. Rozważmy różniczkowanie $d = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}$ pierścienia $k[x, y]$. Wielomian xy stanowi jednoelementową p-bazę pierścienia stałych $k[x, y]^d$ nad $k[x^p, y^p]$:

$$k[x, y]^d = k[x^p, y^p, xy]$$

$$= \{b_0 + b_1 xy + \ldots + b_{p-1}(xy)^{p-1},\ b_0, \ldots, b_{p-1} \in k[x^p, y^p]\}.$$

Hipoteza jakobianowa w charakterystyce dodatniej

Niech $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{F}_p[x_1, \ldots, x_n]$, gdzie p jest liczbą pierwszą. Jeśli

$$\mathrm{Jac}(f_1, \ldots, f_n) \in \mathbb{F}_p \setminus \{0\}$$

i stopień rozszerzenia ciał

$$\mathbb{F}_p(f_1, \ldots, f_n) \subset \mathbb{F}_p(x_1, \ldots, x_n)$$

nie jest podzielny przez p, to $\mathbb{F}_p[f_1, \ldots, f_n] = \mathbb{F}_p[x_1, \ldots, x_n]$.

Twierdzenie (Adjamagbo)
Jeśli powyższa hipoteza jest prawdziwa dla wszystkich n i p, to hipoteza jakobianowa jest prawdziwa.

K. Adjamagbo, *On separable algebras over a UFD and the Jacobian Conjecture in any characteristic*,
w: *A. van den Essen (ed.), Automorphisms of Affine Spaces, Proceedings of the conference "Invertible Polynomial Maps", July 4–8, 1994*,
Curaçao, Caribbean Mathematics Foundation, Kluwer Academic Publishers, 1995.

Uzupełnienie twierdzenia Nousiainena

Twierdzenie (Lang, Mandal)
Kolejne równoważne warunki w terminach różniczkowań jakobianowych $d_i(f) = \mathrm{Jac}(f_1, \ldots, f_{i-1}, f, f_{i+1}, \ldots, f_n)$, $i = 1, \ldots, n$:

(6) $$\frac{\partial^{(p-1)n}}{\partial x_1^{p-1} \ldots \partial x_n^{p-1}} = c d_1^{p-1} \ldots d_n^{p-1} \text{ dla pewnego } c \in k \setminus \{0\},$$

(7) $$\frac{\partial^{(p-1)n}}{\partial x_1^{p-1} \ldots \partial x_n^{p-1}}(f_1^{r_1} \ldots f_n^{r_n})$$
$$= \begin{cases} 0, & r_1, \ldots, r_n \in \{0, \ldots, p-1\},\ r_i < p-1 \text{ dla pewnego } i, \\ c \in k \setminus \{0\}, & r_1 = \cdots = r_n = p-1, \end{cases}$$

(8) dla każdego i oraz $h \in k(x_1, \dots, x_n)$ istnieje $c \in k \setminus \{0\}$ takie, że

$$h = c \sum_{r=0}^{p-1} f_i^r d_i^{p-1}(f_i^{p-r-1} h).$$

J. Lang, S. Mandal, *On Jacobian n-tuples in characteristic p*, Rocky Mountain J. Math. 23 (1993), 271–279.

Twierdzenie (PJ)
Rozważmy wielomiany $f_1, \ldots, f_n \in k[x_1, \ldots, x_n]$.
Oznaczmy: $B = k[x_1^p, \ldots, x_n^p]$, $R_i = B[f_1, \ldots, \widehat{f_i}, \ldots, f_n]$,
$R_{ij} = B[f_1, \ldots, \widehat{f_i}, \ldots, \widehat{f_j}, \ldots, f_n]$, $i \neq j$.

Wówczas Jac$(f_1, \ldots, f_n)$ jest podzielny przez wielomian nierozkładalny $g \in k[x_1, \ldots, x_n]$ dokładnie wtedy, gdy zachodzi co najmniej jeden z warunków:

(i) $g \notin B$ i $g^2 \mid bf_i + c$ dla pewnego i oraz $b, c \in R_i$ takich, że $g \nmid b$,

(ii) $g \in B$ i $g \mid bf_i + c$ dla pewnego i oraz $b, c \in R_i$ takich, że $g \nmid b$,

(iii) $g \mid b_1 f_i + c_1$ i $g \mid b_2 f_j + c_2$ dla pewnych $i \neq j$ oraz $b_1, b_2, c_1, c_2 \in R_{ij}$ takich, że $g \nmid b_1$ i $g \nmid b_2$.

Twierdzenie (PJ)
Przy tych samych oznaczeniach warunek jakobianowy

$$\mathrm{Jac}(f_1, \ldots, f_n) \in k \setminus \{0\}$$

jest równoważny następującemu:

$(*)$ dla dowolnego i oraz $b, c \in R_i$, jeśli NWD$(b, c) = 1$, to wielomian $bf_i + c$ jest bezkwadratowy i p-wolny,
a dla dowolnych $i \neq j$ oraz $b_1, b_2, c_1, c_2 \in R_{ij}$, jeśli NWD$(b_1, c_1) = 1$ i NWD$(b_2, c_2) = 1$, to

$$\mathrm{NWD}(b_1 f_i + c_1, b_2 f_j + c_2) = 1.$$

Wielomian nazywamy p-wolnym, jeśli nie ma dzielników należących do $k[x_1^p, \ldots, x_n^p] \setminus \{0\}$.

Ćwiczenie
Wielomian $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ jest bezkwadratowy i p-wolny dokładnie wtedy, gdy

$$\text{NWD}\left(f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = 1.$$

Twierdzenie (PJ)
Dla m wielomianów $f_1, \ldots, f_m \in k[x_1, \ldots, x_n]$, gdzie $m \in \{1, \ldots, n\}$, następujące warunki są równoważne:

(1) NWD $\left(\mathrm{Jac}^{f_1,\ldots,f_m}_{j_1,\ldots,j_m},\ j_1, \ldots, j_m \in \{1, \ldots, n\}\right) = 1$,

(2) $f_1, \ldots, f_m$ stanowią p-bazę pierścienia stałych pewnego k-różniczkowania,

$(*)$ z poprzedniego twierdzenia.

PJ, *A characterization of p-bases of rings of constants*, przyjęta do druku w Cent. Eur. J. Math., arXiv:1206.3546

Twierdzenie (PJ)
Dla dowolnego wielomianu $f \in k[x_1, \ldots, x_n] \setminus k[x_1^p, \ldots, x_n^p]$, gdzie $\operatorname{char} k = p > 0$, następujące warunki są równoważne:

(1) NWD $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = 1$,

(2) $k[x_1^p, \ldots, x_n^p, f]$ jest pierścieniem stałych k-różniczkowania,

(3) dla dowolnych $b, c \in k[x_1^p, \ldots, x_n^p]$, jeśli NWD$(b, c) = 1$, to wielomian $bf + c$ jest bezkwadratowy i p-wolny.

PJ, *A characterization of one-element p-bases of rings of constants*, Bull. Pol. Acad. Sci. Math. 59 (2011), 19–26.