MATERIAŁY XXVI KONFERENCJI SZKOLENIOWEJ Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ ZESPOLONEJ

2005 **Łódź** **str. 13**

O PEWNYM ZASTOSOWANIU UOGÓLNIONYCH SZEREGÓW POINCARÉ

Piotr Jędrzejewicz (Toruń)

Wstęp

Ważną rolę w teorii niezmienników odgrywa następujące twierdzenie Chevalleya – Shepharda – Todda ([1], 4.2.5; [2], 18.1). Przypomnijmy, że automorfizm g przestrzeni liniowej V nazywamy pseudo-odbiciem, jeśli ma wartość własną 1, której krotność wynosi $\dim V - 1$. Przez $S(V)$ oznaczamy algebrę symetryczną przestrzeni liniowej V.

Twierdzenie. *Niech V bedzie przestrzenią liniową nad ciałem k. Niech G będzie skończoną podgrupą grupy $\mathrm{GL}(V)$. Załóżmy, że rząd grupy G nie dzieli się przez charakterystykę ciała k. Wówczas algebra niezmienników $S(V)^G$ jest algebrą wielomianową dokładnie wtedy, gdy grupa G jest generowana przez pseudo-odbicia.*

W dowodzie implikacji „⇒" tego twierdzenia bada się szereg Poincaré $P(T)$ algebry niezmienników, wykorzystując następujący wzór Moliena ([1], 4.1.3; [2], 17.2):

$$P(T) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \frac{1}{\det(1 - gT)}.$$

W pewnych sytuacjach obserwujemy wyraźne analogie między gradacjami algebr a działaniami grup na algebrach. Odpowiednikiem algebry niezmienników działania jest składowa elementu neutralnego. Celem niniejszej pracy jest przedstawienie odpowiednika wzoru Moliena dla gradacji algebry wielomianów (Stwierdzenie 2) oraz przeprowadzenie dowodu metodą analogiczną do zastosowanej w twierdzeniu Chevalleya – Shepharda – Todda. Zaznaczmy, że odpowiednie twierdzenie dla gradacji (Twierdzenie 1) można udowodnić bezpośrednio ([3]), nie korzystając z szeregów. Poniższy dowód przedstawiamy przede wszystkim jako nieco egzotyczny przykład zastosowania szeregów o współczynnikach w algebrze grupowej (Stwierdzenia 2 i 5).

1 Definicje i oznaczenia

Niech k będzie dowolnym ciałem. Niech G będzie grupą skończoną z notacją multyplikatywną i elementem neutralnym e. Przez A będziemy oznaczali algebrę wielomianów $k[x_1, \ldots, x_m]$.

Rozważmy G-gradację algebry A:

$$A = \bigoplus_{g \in G} A^g$$

określoną przez warunki $x_1 \in A^{g_1}$, …, $x_m \in A^{g_m}$. Wówczas

$$A = \bigoplus_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ g \in G}} A_n^g,$$

gdzie A_n^g jest przekrojem składowej A^g ze składową stopnia n gradacji wyznaczonej przez stopień wielomianu.

Możemy, dla uproszczenia rozważań, założyć, że elementy $g_1, \ldots, g_m$ generują grupę G. Ich rzędy oznaczmy odpowiednio przez $r_1, \ldots, r_m$. Podgrupę generowaną przez elementy $g_1, \ldots, g_{i-1}, g_{i+1}, \ldots, g_m$ oznaczmy przez G_i. Niech $G_0 = \bigcap_{i=1}^m G_i$. Indeks podgrupy G_i w grupie G oznaczmy przez t_i.

Odnotujmy następujące twierdzenie ([3]).

Twierdzenie 1 *Składowa A^e elementu neutralnego jest k-algebrą wielomianową dokładnie wtedy, gdy $G_0 = \{e\}$.*

Przedstawimy dowód implikacji „⇒” wykorzystujący szeregi o współczynnikach w algebrze grupowej $\mathbb{Q}G$. Rozważanej gradacji odpowiada uogólniony szereg Poincaré

$$s(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{g \in G} (\dim_k A_n^g) g T^n.$$

Zakładamy, że składowa A^e jest generowana przez m algebraicznie niezależnych wielomianów jednorodnych u_1, …, u_m, stopni, odpowiednio, d_1, …, d_m. Liczba generatorów jest równa m, gdyż $x_i^{r_i} \in A^e$ dla $i = 1, \ldots, m$, czyli A jest całkowita nad A^e.

Dla każdego $g \in G$ określamy (zwykły) szereg Poincaré składowej A^g:

$$s_g(T) \in \mathbb{Q}[[T]], \qquad s_g(T) = \sum_{n=0}^{\infty} (\dim_k A_n^g) T^n.$$

Wówczas

$$s(T) = \sum_{g \in G} g \cdot s_g(T).$$

2 Odpowiednik wzoru Moliena

Odnotujmy równość, którą możemy uznać za odpowiednik wzoru Moliena, zachodzącego dla niezmienników działań grup.

Stwierdzenie 2

$$s(T) = \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{1 - g_i T}.$$

Dowód. Jednomiany $x_1^{l_1} \cdot \ldots \cdot x_m^{l_m}$, spełniające warunki

$$l_1 + \ldots + l_m = n \quad \text{ i } \quad g_1^{l_1} \cdot \ldots \cdot g_m^{l_m} = g,$$

stanowią bazę przestrzeni liniowej A_n^g. Zatem

$$\prod_{i=1}^{m} \frac{1}{1 - g_i T} = \prod_{i=1}^{m} \sum_{l_i=0}^{\infty} (g_i T)^{l_i} = \sum_{l_1, \ldots, l_m \geqslant 0} (g_1 T)^{l_1} \cdot \ldots \cdot (g_m T)^{l_m} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{g \in G} \sum_{\substack{l_1, \ldots, l_m \geqslant 0 \\ l_1 + \ldots + l_m = n \\ g_1^{l_1} \cdot \ldots \cdot g_m^{l_m} = g}} g_1^{l_1} \cdot \ldots \cdot g_m^{l_m} T^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{g \in G} (\dim_k A_n^g) g T^n = s(T). \ \square$$

3 Fakty pomocnicze

Zgodnie z założeniem, szereg Poincaré składowej A^e wyraża się wzorem:

Stwierdzenie 3 ([1], 2.5.5; [2], 17.1)

$$s_e(T) = \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{1 - T^{d_i}}. \ \square$$

W dowodzie Stwierdzenia 5 skorzystamy z następującego lematu.

Lemat 4 *W algebrze grupowej $\mathbb{Q}G$ zachodzą równości:*

$$\text{(a)} \qquad \prod_{i=1}^{m} \frac{e + g_i + \ldots + g_i^{r_i-1}}{r_i} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g,$$

$$\text{(b)} \qquad \frac{(1-r_i)e + (3-r_i)g_i + \ldots + (r_i-1)g_i^{r_i-1}}{2r_i} \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} \frac{e + g_j + \ldots + g_j^{r_j-1}}{r_j} =$$

$$= \frac{1}{2|G|} \sum_{l=0}^{t_i-1} (1 - t_i + 2l) \sum_{g \in g_i^l G_i} g.$$

Dowód. (a) Indukcja względem m. Dla $m = 1$ grupa G jest cykliczna i równość jest oczywista. Niech równość będzie prawdziwa dla m. Rozważmy grupę G generowaną przez $m + 1$ elementów $g_1, \ldots, g_{m+1}$. Niech G' będzie podgrupą generowaną przez elementy $g_1, \ldots, g_m$. Niech $t = (G : G')$. Wówczas:

$$\prod_{i=1}^{m+1} \frac{e + g_i + \ldots + g_i^{r_i-1}}{r_i} = \frac{1}{|G'|} \sum_{g \in G'} g \cdot \frac{e + g_{m+1} + \ldots + g_{m+1}^{r_{m+1}-1}}{r_{m+1}} =$$

$$= \frac{1}{r_{m+1}|G'|} \cdot \sum_{l=0}^{r_{m+1}-1} \sum_{g \in g_{m+1}^l G'} g = \frac{1}{r_{m+1}|G'|} \cdot \frac{r_{m+1}}{t} \cdot \sum_{g \in G} g = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g.$$

(b) Korzystając z punktu (a) dla grupy G_i oraz ze wzoru na sumę wyrazów ciągu arytmetycznego, dostajemy:

$$\frac{(1-r_i)e + (3-r_i)g_i + \ldots + (r_i-1)g_i^{r_i-1}}{2r_i} \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} \frac{e + g_j + \ldots + g_j^{r_j-1}}{r_j} =$$

$$= \frac{1}{2r_i} \cdot \sum_{l=0}^{r_i-1} (1 - r_i + 2l) g_i^l \cdot \frac{1}{|G_i|} \cdot \sum_{g \in G_i} g = \frac{1}{2r_i|G_i|} \cdot \sum_{l=0}^{r_i-1} (1 - r_i + 2l) \sum_{g \in g_i^l G_i} g =$$

$$= \frac{1}{2r_i|G_i|} \cdot \sum_{l=0}^{t_i-1} \frac{1 - r_i + 2l + 1 - r_i + 2(l + r_i - t_i)}{2} \cdot \frac{r_i}{t_i} \cdot \sum_{g \in g_i^l G_i} g =$$

$$= \frac{1}{2|G|} \sum_{l=0}^{t_i-1} (1 - t_i + 2l) \sum_{g \in g_i^l G_i} g. \ \square$$

W dowodzie Stwierdzenia 5 wykorzystamy następującą technikę rachunkową. Będziemy przekształcali szereg formalny należący do $\mathbb{Q}G[[T]]$ do postaci $\frac{a(T)}{b(T)}$, gdzie $a(T)$ jest wielomianem należącym do $\mathbb{Q}G[T]$, a $b(T)$ jest wielomianem należącym do $\mathbb{Q}[T]$, spełniającym warunek $b(1) \neq 0$.

Jeżeli dwa szeregi formalne w pierścieniu $\mathbb{Q}G[[T]]$ są równe i każdy z nich przekształcimy do opisanej postaci $\frac{a(T)}{b(T)}$, to w otrzymanej równości możemy podstawić $T = 1$, i dostaniemy równość elementów algebry $\mathbb{Q}G$.

Stwierdzenie 5 dostarcza wzorów analogicznych do znanych wzorów dla niezmienników działań grup ([1], 4.1.5, 4.1.6; [2], 17.4).

Stwierdzenie 5

$$\text{(a)} \qquad |G| = \prod_{i=1}^{m} d_i,$$

$$\text{(b)} \qquad \sum_{i=1}^{m}(t_i - 1) = \sum_{i=1}^{m}(d_i - 1).$$

Dowód. (a) Na mocy Stwierdzenia 2 zachodzi równość

$$\prod_{i=1}^{m} \frac{1-T}{1-g_iT} = \sum_{g\in G} g(1-T)^m s_g(T).$$

Zauważmy, że po lewej stronie otrzymujemy

$$\frac{1-T}{1-g_iT} = \frac{1-(g_iT)^{r_i}}{1-g_iT} \cdot \frac{1-T}{1-T^{r_i}} = \frac{1+g_iT+\ldots+(g_iT)^{r_i-1}}{1+T+\ldots+T^{r_i-1}},$$

więc z Lematu 4a

$$\prod_{i=1}^{m} \frac{1-T}{1-g_iT}\bigg|_{T=1} = \prod_{i=1}^{m} \frac{e+g_i+\ldots+g_i^{r_i-1}}{r_i} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g.$$

Z prawej strony, w składniku odpowiadającym $g = e$

$$(1-T)^m s_e(T) = \prod_{i=1}^{m} \frac{1-T}{1-T^{d_i}} = \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{1+T+\ldots+T^{d_i-1}}$$

podstawiamy $T = 1$ i, porównując ze składnikiem z lewej strony, dostajemy

$$\frac{1}{|G|} = \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{d_i}.$$

(b) Niech $w_g(T) = (1-T)^m s_g(T)$. Z punktu (a) mamy

$$\prod_{i=1}^{m} \frac{1+g_iT+\ldots+(g_iT)^{r_i-1}}{1+T+\ldots+T^{r_i-1}} = \sum_{g\in G} g w_g(T).$$

Różniczkujemy lewą stronę, podstawiamy $T = 1$ i korzystamy z Lematu 4b:

$$\left(\prod_{i=1}^{m} \frac{1 + g_i T + \ldots + (g_i T)^{r_i - 1}}{1 + T + \ldots + T^{r_i - 1}} \right)' \Bigg|_{T=1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left[\frac{(g_i + 2g_i^2 T + \ldots + (r_i - 1) g_i^{r_i - 1} T^{r_i - 2}) \cdot (1 + T + \ldots + T^{r_i - 1})}{(1 + T + \ldots + T^{r_i - 1})^2} \right.$$

$$\left. - \frac{(1 + 2T + \ldots + (r_i - 1) T^{r_i - 2}) \cdot (1 + g_i T + \ldots + (g_i T)^{r_i - 1})}{(1 + T + \ldots + T^{r_i - 1})^2} \right] \cdot$$

$$\cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} \frac{1 + g_j T + \ldots + (g_j T)^{r_j - 1}}{1 + T + \ldots + T^{r_j - 1}} \Bigg|_{T=1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{(1 - r_i) e + (3 - r_i) g_i + \ldots + (r_i - 1) g_i^{r_i - 1}}{2 r_i} \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} \frac{e + g_j + \ldots + g_j^{r_j - 1}}{r_j} =$$

$$= \frac{1}{2|G|} \sum_{l=0}^{t_i - 1} (1 - t_i + 2l) \sum_{g \in g_i^l G_i} g.$$

Otrzymany współczynnik przy $g = e$ przyrównujemy do współczynnika po prawej stronie:

$$\frac{1}{2|G|} \sum_{i=1}^{m} (1 - t_i) = (w_e(T))'|_{T=1} = \left(\prod_{i=1}^{m} \frac{1}{1 + T + \ldots + T^{d_i - 1}} \right)' \Bigg|_{T=1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{-(1 + 2T + \ldots + (d_i - 1) T^{d_i - 2})}{1 + T + \ldots + T^{d_i - 1}} \cdot \prod_{j=1}^{m} \frac{1}{1 + T + \ldots + T^{d_j - 1}} \Bigg|_{T=1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{-(d_i - 1)}{2} \cdot \prod_{j=1}^{m} \frac{1}{d_i}.$$

Zatem uwzględniając, że $|G| = \prod_{i=1}^{m} d_i$, otrzymujemy:

$$\sum_{i=1}^{m} (t_i - 1) = \sum_{i=1}^{m} (d_i - 1). \ \square$$

4 Dokończenie dowodu

Zauważmy, że

$$\bigcap_{i=1}^{m} G_i/G_0 = G_0/G_0 = \{\overline{e}\},$$

gdzie $\overline{e}$ jest warstwą elementu e w grupie ilorazowej G/G_0. Zatem dla gradacji grupą G/G_0, otrzymanej z gradacji grupą G, możemy zastosować implikację „$\Leftarrow$" Twierdzenia 1.

Wniosek 6 *Algebra $A^{\overline{e}}$ jest generowana przez m algebraicznie niezależnych wielomianów jednorodnych.* $\square$

Dokończmy dowód implikacji „$\Rightarrow$" Twierdzenia 1.

Dowód. Jednorodne generatory $u_1, \ldots, u_m$ algebry A^e mają stopnie $d_1, \ldots, d_m$. Niech $v_1, \ldots, v_m$ będą algebraicznie niezależnymi jednorodnymi generatorami algebry $A^{\overline{e}}$, stopni $d'_1, \ldots, d'_m$. Dla rozważanej G/G_0-gradacji mamy

$$t'_i = (G/G_0 : G_i/G_0) = (G : G_i) = t_i,$$

więc dostajemy (Stwierdzenie 5):

$$\sum_{i=1}^{m}(d'_i - 1) = \sum_{i=1}^{m}(t'_i - 1) = \sum_{i=1}^{m}(t_i - 1) = \sum_{i=1}^{m}(d_i - 1),$$

$$\prod_{i=1}^{m} d'_i = |G/G_0| \leqslant |G| = \prod_{i=1}^{m} d_i.$$

Ponadto $A^e \subseteq A^{\overline{e}}$. Rozumując identycznie jak w [1], 4.2.11, lub [2], 18.5, otrzymujemy równość $d'_i = d_i$ dla $i = 1, \ldots, m$, z której wynika, że $|G/G_0| = |G|$, czyli $G_0 = \{e\}$. $\square$

Literatura

[1] T. Springer, *Invariant theory*, Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 1977. Przekład rosyjski: Mir, Moskwa, 1981.

[2] R. Kane, *Reflection groups and invariant theory*, Springer-Verlag, New York – Berlin – Heidelberg, 2001.

[3] P. Jędrzejewicz, *Polynomiality of the unit component of homogeneous gradings of polynomial algebras* (w przygotowaniu).

ON SOME APPLICATION OF THE GENERALIZED POINCARÉ SERIES

Summary. Let A^e be the unit component of a homogeneous grading of a polynomial algebra A. We present a proof of a sufficient condition for A^e to be a polynomial algebra, using an analog of Molien Formula for power series with coefficients in a group algebra.

Łódź, 10 – 14 stycznia 2005 r.