MATERIAŁY NA XXXIII KONFERENCJĘ I WARSZTATY
Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ

2012 **Łódź** **str. 27**

O ROZWIĄZANIACH RÓWNAŃ ANALITYCZNYCH

Janusz Gwoździewicz, Arkadiusz Płoski (Kielce)

1 Wstęp

Funkcję $\phi : U \to \mathbf{R}$ ciągłą w zbiorze otwartym $U \subset \mathbf{R}$ nazywamy funkcją algebraiczną gdy istnieje niezerowy wielomian dwóch zmiennych $P(x, y)$ taki, że $P(x, \phi(x)) = 0$ dla $x \in U$.

W pracy doktorskiej [1] Ali Abdulkarim El-Siblani udowodnił następujące twierdzenie które podajemy tutaj we wzmocnionej formie:

Twierdzenie 1.1 *Jeśli ϕ jest funkcją algebraiczną spełniającą równanie wielomianowe stopnia $d > 1$ posiadającą ciągłe pochodne do rzędu $\frac{1}{2}(d-1)(d-2)+1$ włącznie to ϕ jest funkcją analityczną.*

Wynika stąd wniosek będący szczególnym przypadkiem dobrze znanego twierdzenia Malgrange'a

Wniosek 1.2 *Jeśli ϕ jest funkcją algebraiczną klasy $\mathcal{C}^\infty$ to ϕ jest funkcją analityczną.*

Problem optymalności Twierdzenia 1.1 jest w zasadzie otwarty: wprawdzie dla $d \leq 5$ twiedzenia nie można poprawić ale dla $d > 5$ jest to możliwe. Optymalne oszacowanie dla dostatecznie dużych d nie jest znane.

2 Rząd styczności

Będziemy używali standardowych oznaczeń: $\mathbf{C}\{x,y\}$ jest pierścieniem szeregów potęgowych zbieżnych, $\mathbf{C}\{x\}^*$ pierścieniem szeregów Puiseux (por [7]). Szereg $f(x,y) \in \mathbf{C}\{x,y\}$ nazywamy miniregularnym gdy po rozpisaniu na sumę wielomianów jednorodnych $f(x,y) = f_p(x,y) + f_{p+1}(x,y) + \cdots$ stopni $\deg f_i = i$ wielomian najniższego stopnia spełnia warunek $f_p(0,y) \neq 0$.

Gdy $f = f(x,y)$ jest szeregiem miniregularnm rzędu p to

$$f(x,y) = u(x,y)\prod_{i=1}^{p}(y - y_i(x)),$$

gdzie $y_1(x), \ldots, y_p(x)$ jest ciągiem szeregów Puiseux rzędów $\operatorname{ord} y_i \geq 1$ zaś $u(x,y) \in \mathbf{C}\{x,y\}$ jest dzielnikiem jedynki w $\mathbf{C}\{x,y\}$ tzn. $u(0,0) \neq 0$. Piszemy wówczas $\operatorname{Zer} f = \langle y_1(x), \ldots, y_p(x)\rangle$.

Gdy f, $g \in \mathbf{C}\{x,y\}$ są szeregami miniregularnymi rzędu $p > 0$ i $q > 0$ odpowiednio i jeśli $\operatorname{Zer} f = \langle y_1(x), \ldots, y_p(x)\rangle$, $\operatorname{Zer} g = \langle z_1(x), \ldots, z_q(x)\rangle$ to definiujemy rząd styczności $K_0(f,g)$ krzywych $f(x,y) = 0$, $g(x,y) = 0$ przyjmując

$$K_0(f,g) = \sup\{\operatorname{ord}(y_i(x) - z_j(x)) : 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q\}.$$

Jest $K_0(f,g) < +\infty$ dla względnie pierwszych f, g.

W dalszej części oznaczamy $K_0(f) = K_0(f, \frac{\partial f}{\partial y})$ dla każdego szeregu f miniregularnego rzędu $\operatorname{ord} f > 1$. Oczywiście $K_0(f) < +\infty$ dokładnie wtedy gdy szereg f nie ma czynników wielokrotnych.

Lemat 2.1 *Jeżeli szereg f jest miniregularny rzędu $p > 1$, to*

$$K_0(f) = \sup_{i \neq j}(\operatorname{ord} y_i(x) - \operatorname{ord} y_j(x)).$$

Dowód. Niech będzie $\operatorname{Zer} \frac{\partial f}{\partial y} = \langle z_1(x), \ldots, z_{p-1}(x)\rangle$. Z lematu Kuo-Lu (por. [4]) wynika, że zbiory $\{\operatorname{ord}(y_i(x) - y_j(x)) : i \neq j\}$ oraz $\{\operatorname{ord}(y_i(x) - z_k(x)) : 1 \leq i \leq p, 1 \leq k \leq p-1\}$ są identyczne. Stąd wynika lemat. ■

Lemat 2.2 *Jeżeli $f = f_1 \cdots f_r$ jest rozkładem szeregu f na czynniki nierozkładalne w $\mathbf{C}\{x,y\}$, to $K_0(f) = \sup\{\sup_i K_0(f_i), \sup_{i\neq j} K_0(f_i, f_j)\}$.*

Dowód. Stosujemy Lemat 2.1 i definicję rzędu styczności. ■

Uwaga 2.3 *Można sprawdzić, że gdy f jest miniregularnym szeregiem nierozkładalnym o charakterystyce $(\beta_0, \ldots, \beta_g)$, to $K_0(f) = \beta_g/\beta_0$. Obliczenie $K(f,g)$ dla pary szeregów nierozkładalnych f, g redukuje się do wyznaczenia ich charakterystyk oraz krotności przecięcia $i_0(f,g)$.*

Uwaga 2.4 *J. Chądzyński i T. Krasiński udowodnili, że gdy f, g są miniregularne i względnie pierwsze to $K_0(f,g)$ jest równy wykładnikowi separacji regularnej pary $f=0$, $g=0$ (por. [2] Theorem 4).*

Dokładniej, $K_0(f,g)$ jest najmniejszym z wykładników $\theta > 0$ dla których zachodzi nierówność

$$\operatorname{dist}\bigl(z,\{f=0\}\bigr)+\operatorname{dist}\bigl(z,\{g=0\}\bigr)\geq C\cdot\operatorname{dist}\bigl(z,\{f=0\}\cap\{g=0\}\bigr)^{\theta}$$

dla pewnego $C>0$ i wszystkich $z=(x,y)$ z małego otoczenia $0\in\mathbf{R}^2$.

Formuła powyższa pozwala uogólnić pojęcie rzędu styczności na przypadek hiperpowierzchni.

Porównamy teraz $K_0(f)$ i liczbę Milnora $\mu_0(f)$ krzywej $f=0$. Zakładamy, że szereg f jest miniregularny.

Lemat 2.5 *Niech $\mu_0(f)$ będzie liczbą Milnora krzywej $f=0$. Wtedy $2K_0(f)\leq\mu_0(f)-(\operatorname{ord}f-1)^2+2$.*

Dowód. Oznaczmy $p=\operatorname{ord}f$. Według znanej formuły dla liczby Milnora (por. [7]) mamy

$$\mu_0(f)=2\sum_{1\leq i<j\leq p}\operatorname{ord}(y_i(x)-y_j(x))-p+1$$

a stąd $\mu_0(f)\geq 2\bigl(K_0(f)+\frac{1}{2}p(p-1)-1\bigr)-p+1=2K_0(f)+(p-1)^2-2.$ ■

Niech k będzie dodatnią liczbą całkowitą. Szereg Puiseux $y(x)$ nazwiemy k-regularnym gdy wszystkie jego wyrazy rzędu $\leq k$ mają wykładniki całkowite.

Lemat 2.6 *Niech $y(x)\in\operatorname{Zer}f$ będzie k-regularnym szeregiem Puiseux. Jeżeli $k\geq K_0(f)$ to $y(x)\in\mathbf{C}\{x\}$.*

Dowód. Przypuśćmy, że $y(x)\notin\mathbf{C}\{x\}$. W takim razie $y(x)=Y(x^{1/m})$ gdzie $Y(t)\in\mathbf{C}\{t\}$ i $m>1$. Oznaczmy $\tilde{y}(x)=Y(\epsilon x^{1/m})$ gdzie ϵ jest m-tym pierwotnym zespolonym pierwiastkiem z 1. Jest więc $f(x,\tilde{y}(x))=0$ oraz $\operatorname{ord}(\tilde{y}(x)-y(x))>k$. Prowadzi to do sprzeczności z założeniem, bo na mocy Lematu 2.1 $K_0(f)\geq\operatorname{ord}(\tilde{y}(x)-y(x))$. ■

Załóżmy teraz, że $f(x,y)$ jest wielomianem stopnia $d>1$ względem zespołu zmiennych (x,y). Jeżeli $f=f_1\cdots f_m g$ w $\mathbf{C}[x,y]$ gdzie wielomiany f_i są nierozkładalne dla $i=1,\dots,m$, $f_1(0)=\ldots=f_m(0)=0$ oraz $g(0)\neq 0$ to mówimy, że krzywa afiniczna $f=0$ ma m składowych nierozkładalnych przechodzących przez 0. Krzywa afiniczna $f=0$ jest zredukowana gdy wielomian f nie ma czynników wielokrotnych w $\mathbf{C}[x,y]$.

Lemat 2.7 *Niech $f(x,y)=0$ będzie krzywą afiniczną zredukowaną stopnia $d>1$ której m składowych nierozkładalnych przechodzi przez 0. Wówczas $\mu_0(f)\leq(d-1)(d-2)+m-1$.*

Dowód. Por. [3], Proposition 6.3 ■

3 Rozwiązania klasy $\mathcal{C}^k$ równań analitycznych

Udowodnimy następujące

Twierdzenie 3.1 *Niech $f = f(x,y) \in \mathbf{R}\{x,y\}$ będzie szeregiem niezerowym bez czynników wielokrotnych i niech ϕ, $\phi(0) = 0$ będzie funkcją ciągłą w otoczeniu $0 \in \mathbf{R}$ taką, że $f(x,\phi(x)) = 0$ dla $x \in \mathbf{R}$ bliskich 0. Jeżeli $\phi \in \mathcal{C}^k$ gdzie $2k \geq \mu_0(f) - (\operatorname{ord} f - 1)^2 + 2$, to ϕ jest funkcją analityczną w otoczeniu $0 \in \mathbf{R}$.*

W dowodzie powyższego twierdzenia wykorzystamy następujący

Lemat 3.2 *Niech $f = f(x,y) \in \mathbf{R}\{x,y\}$ będzie niezerowym szeregiem i niech ϕ, $\phi(0) = 0$ będzie funkcją ciągłą na prawo od $0 \in \mathbf{R}$ tzn. w pewnym przedziale $[0,\delta)$, $\delta > 0$. Wtedy istnieje rzeczywisty szereg Puiseux $y(x^{1/n}) \in \mathbf{R}\{x\}^*$ taki, że $\phi(x) = y(x^{1/n})$ na prawo od zera. Jeżeli $\phi \in \mathcal{C}^k$ i $T_0^k\phi$ jest k-tym wielomianem Taylora funkcji ϕ to $\operatorname{ord}(y(x^{1/n}) - T_0^k\phi(x)) > k$.*

Dowód. Z twierdzenia o lokalnym opisie krzywej analitycznej rzeczywistej (por. [6]) wynika, że kiełek zbioru opisanego równaniem $f(x,y) = 0$ i nierównością $x > 0$ w punkcie $0 \in \mathbf{R}^2$ ma skończoną liczbę składowych spójnych z których każda ma parametryzację postaci $x = t^n$, $y = y(t)$ gdzie $y(t) \in \mathbf{R}\{t\}$. Dla dostatecznie małego $\delta > 0$ wykres funkcji ϕ nad przedziałem $(0,\delta)$ jako podzbór spójny zbioru $f(x,y) = 0$, $0 < x < \delta$ jest identyczny z jakąś jego składową spójną. Część druga lematu wynika z obserwacji, że jeśli funkcja $x \to y(x^{1/n})$ jest klasy $\mathcal{C}^k$ to szereg Puiseux $y(x^{1/n})$ jest k-regularny. ■

Możemy teraz podać

Dowód twierdzenia 3.1. Załóżmy najpierw, że $\operatorname{ord} f(0,y) = \operatorname{ord} f$. Na mocy lematu 3.2 istnieje szereg Puiseux $y(x^{1/n}) \in \mathbf{R}\{x\}^*$ taki, że $\phi(x) = y(x^{1/n})$ na prawo od zera. Stąd łatwo wynika, że $f(x, y(x^{1/n})) = 0$. Ponadto szereg $y(x^{1/n})$ jest k-regularny i jak wynika z lematu 2.5 $2k \geq \mu_0(f) - (\operatorname{ord} f - 1)^2 + 2 \geq 2K_0(f)$. Skoro $k \geq K_0(f)$ to $y(x^{1/n})) = Y(x) \in \mathbf{R}\{x\}$.

Stosując lemat 3.2 do szeregu $f(-x,y)$ i funkcji $x \to \phi(-x)$ na prawo od zera podobnie jak wyżej stwierdzamy istnienie szeregu $Y_1(x) \in \mathbf{R}\{x\}$ takiego, że $\phi(x) = Y_1(x)$ na lewo od zera. Szeregi $Y(x)$, $Y_1(x)$ są rozwiązaniami równania $f(x,y) = 0$ i $\operatorname{ord}(Y(x) - Y_1(x)) > k \geq K_0(f)$ bo oba szeregi mają identyczy k-ty wielomian Taylora. Stąd $Y(x) = Y_1(x)$ a więc funkcja ϕ jest analityczna.

Dla zakończenia dowodu wystarczy zauważyć, że stosując zamianę zmiennych $x = x_1 + cy_1$, $y = y_1$ dla generycznych $c \in \mathbf{R}$ otrzymujemy szereg $f_1(x_1,y_1) = f(x_1 + cy_1, y_1)$ spełniający warunek $\operatorname{ord} f_1(0,y_1) = \operatorname{ord} f_1$. Wykres funkcji ϕ w nowych współrzędnych ma równanie $y_1 = \phi(x_1 + cy_1)$ które dla generycznych c spełnia warunki twierdzenia o funkcji uwikłanej i wyznacza funkcję ϕ_1 o wykresie $y_1 = \phi_1(x_1)$ w pobliżu 0. Funkcje ϕ, ϕ_1 są jednocześnie klasy $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$ i z analityczności ϕ_1 wynika analityczność ϕ.

Na mocy udowodnionego już przypadku gdy $2k \geq \mu_0(f) - (\operatorname{ord} f - 1)^2 + 2 = \mu_0(f_1) - (\operatorname{ord} f_1 - 1)^2 + 2$ to funkcja ϕ_1 jest analityczna a więc także funkcja ϕ. ■

Możemy teraz podać

Dowód twierdzenia 1.1. Załóżmy, że $f = f(x, y) \in \mathbf{R}[x, y]$ jest wielomianem bez czynników wielokrotnych stopnia $d > 1$. Ze względu na lokalny charakter twierdzenia wystarczy sprawdzić, że jeśli funkcja ϕ ciągła w otoczeniu 0, $\phi(0) = 0$ spełnia warunek $f(x, \phi(x)) = 0$ i jest klasy $\mathcal{C}^k$ gdzie $k \geq \frac{1}{2}(d-1)(d-2)+1$ to jest analityczna w zerze.

Niech m będzie liczbą zespolonych składowych nierozkładalnych przechodzących przez $0 \in \mathbf{C}^2$ krzywej afinicznej $f(x, y) = 0$. Oczywiście $m \leq \operatorname{ord} f$ a więc na mocy lematu 2.7 $\mu_0(f) - (\operatorname{ord} f - 1)^2 + 2 \leq (d-1)(d-2) + m - 1 - (m-1)^2 + 2 \leq (d-1)(d-2) + 2$ a stąd $2k \geq \mu_0(f) - (\operatorname{ord} f - 1)^2 + 2$. Na mocy twierdzenia 3.1 stwierdzamy, że ϕ jest analityczna w zerze. ∎

Literatura

[1] Ali Abduklarim El-Siblani, *La degreé de non analycité des fonctiones semi-algébiques,* Thèse. L'Université de Savoie 1999.

[2] J. Chądzyński and T. Krasiński, *On the Łojasiewicz exponent for analytic curves,* Singularities Symposium – Łojasiewicz 70. Banach Center Publications, vol. 44, Warszawa 1998, 73–80.

[3] J. Gwoździewicz and A. Płoski, *Formulae for the singularites at infinity of plane algebraic curves,* Univ. Iag. Acta Math. 39 (2001), 109–133.

[4] J. Gwoździewicz and A. Płoski, *On the Merle formula for polar invariants,* Bull. Soc. Sci. Lett. Lódz 41 (7), (1991), 61–67.

[5] B Malgrange, Ideals od differentiable functions. Oxford University Press 1966.

[6] J. Milnor, Singular points of complex hypersurfaces. Ann. Math. Stud. Princetown 1968.

[7] A. Płoski, *Szeregi Puiseux, diagramy Newtona i odwzorowania holomorficze płaszczyzny* $\mathbf{C}^2$, X Konferencja Szkoleniowa z Teorii Zagadnień Ekstremalnych, Łódź 1989, 74–99

On the solutions of analytic equations

Summary. Let ϕ be a continuous function of one real variable with a graph contained in the algebraic curve of degree d. We prove that if ϕ has all derivatives up to order $\frac{1}{2}(d-1)(d-2)+1$ then ϕ is analytic. This is an improvement of Ali Abdulkarim El-Siblani's result.

Łódź, 9 – 13 stycznia 2012 r.