**MATERIAŁY XIX KONFERENCJI SZKOLENIOWEJ
Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ
ZESPOLONEJ**

1998 **Łódź** **str. 8**

CHARAKTERYSTYKA EULERA I OSOBLIWOŚCI W NIESKOŃCZONOŚCI KRZYWYCH ALGEBRAICZNYCH

J. Gwoździewicz, A. Płoski (Kielce)

Wstęp

Ten artykuł ma swoją krótką historię. Starszy autor zainteresowany osobliwościami w nieskończoności krzywych algebraicznych postanowił zrobić zestawienie różnych interesujących formuł dotyczących osobliwości a występujących w literaturze. Mozolnie uzupełniał dowody starając się dowiedzieć wszystkiego co możliwe o charakterystyce Eulera z dostępnych książek. Tymczasem młodszy autor nauczył się "z powietrza" nowej techniki całkowania względem charakterystyki Eulera, podał eleganckie dowody wszystkich formuł i w końcu dał się namówić na zapisanie tego wszystkiego.

W pierwszej części artykułu którą nazwaliśmy "formularzem" podajemy zestawienie interesujących nas formuł. Naszym zamiarem było uzupełnienie znanego zestawienia F. Phama [Ph]. W drugiej części podany jest zwięzły wykład całkowania względem charakterystyki Eulera a następnie systematyczne dowody wypisanych w "formularzu" formuł.

W tekście używamy standardowych oznaczeń. Gdy f, $g \in \mathbb{C}[X,Y]$ to symbolem

$(f,g)_p$ oznaczamy krotność odwzorowania $(f,g):\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ w punkcie p. Zamiast $\sum_{p\in\mathbb{C}^2}(f,g)_p$ piszemy krótko $(f,g)_{\mathbb{C}^2}$. Zatem $(f,g)_{\mathbb{C}^2}<+\infty$ dokładnie wtedy gdy układ równań $f=g=0$ ma skończoną liczbę rozwiązań. Ponadto oznaczamy $\mu_p(f)=(\partial f/\partial x,\partial f/\partial y)_p$ oraz $\mu(f)=\sum_{p\in\mathbb{C}^2}\mu_p(f)$. Mamy $\mu(f)<+\infty$ wtedy, gdy wielomian f ma skończoną liczbę punktów krytycznych. Podstawowe własności liczby Milnora można znaleźć w artykule [Pl]. Dowód charakteryzacji punktów bifurkacyjnych odwzorowania wielomianowego $f:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}$ podany jest w rozprawie habilitacyjnej T. Krasińskiego [Kr].

"Formularz"

Niech $C\subset\mathbb{P}$ będzie zredukowaną krzywą rzutową stopnia d. Krzywa C jest zwarta i spójna, co więcej, jest ona topologicznym wielościanem. Dla każdego punktu $p\in C$ oznaczamy $\mu_p(C)$, $\delta_p(C)$, $r_p(C)$ odpowiednio: liczbę Milnora, niezmiennik Hironaki i liczbę gałęzi krzywej C w punkcie p (cf. [Pl]). Oznaczenia te obowiązują we wszystkich podanych niżej formułach.

I. Formuła dla charakterystyki Eulera krzywej rzutowej.
Niech $\chi(C)$ będzie charakterystyką Eulera krzywej C.
Wówczas $\chi(C)=-d(d-3)+\sum_p\mu_p(C)$.

Suma wystepująca w powyższej formule jest faktycznie skończona bo $\mu_p(C)>0$ dokładnie wtedy gdy, p jest punktem osobliwym krzywej C. Różne dowody powyższej formuły podane są w [BK], [BR] i [HL]. Dowód wykorzystujący technikę całkowania względem charakterystyki Eulera podany jest w dalszej części artykułu.

Niech teraz $\nu:\tilde{C}\to C$ będzie normalizacją krzywej C. Zatem $\tilde{C}$ jest jednowymiarową rozmaitością zespoloną a odwzorowanie indukowane $\tilde{C}\setminus\nu^{-1}(S)\to C\setminus S$, $S=\operatorname{Sing}C$, jest biholomorfizmem. Bezpośrednie konstrukcje normalizacji podane są w książkach [GH] oraz [Ki].

II. Formuła dla charakterystyki Eulera normalizacji krzywej rzutowej.
Jeżeli $\nu:\tilde{C}\to C$ jest normalizacją krzywej C, to

$$\chi(\tilde{C})=\chi(C)+\sum_p(r_p(C)-1).$$

Dowód powyższej formuły jest naszkicowany w [GH]. Inny dowód wykorzystujący całkowanie względem charakterystyki Eulera podajemy nastepnym rozdziale. Z formuł I i II łatwo wynikają formuły znane w literaturze jako wzory M. Noethera.

III. Formuły M. Noethera.
Jeżeli $\tilde{C}$ jest normalizacją krzywej C to

$$\chi(\tilde{C})=-d(d-3)+\sum_p(\mu_p(C)+r_p(C)-1).$$

Gdy C jest nierozkładalną krzywą to normalizacja $\tilde{C}$ jest powierzchnią Riemanna rodzaju

$$g(\tilde{C}) = 1/2(d-1)(d-2) - \sum_p \delta_p(C).$$

Dowód. Aby dostać żądaną formułę na $\chi(\tilde{C})$ wystarczy wstawić w formule II $\chi(C)$ obliczone według wzoru I.

Gdy C jest nierozkładalną krzywą, to $\tilde{C}$ jako powierzchnia Riemanna ma określony rodzaj $g(\tilde{C})$ związany z charakterystyką Eulera wzorem $\chi(\tilde{C}) = 2 - 2g(\tilde{C})$. Korzystając z tego faktu oraz ze związku $2\delta_p(C) = \mu_p(C) + r_p(C) - 1$ otrzymujemy wzór dla $g(\tilde{C})$. Bezpośredni dowód wzorów M. Noethera podany jest w [Ki] (por. także [BK]).

Dalej będzie użyteczna

IV. Formuła dla charakterystyki Eulera krzywej otwartej.

Jeżeli F jest skończonym podzbiorem krzywej $C \subset \mathbb{P}^2$, to

$$\chi(C \setminus F) = \chi(C) - \#F.$$

Jej dowód podamy w następnym rozdziale.

Niech teraz $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ będzie wielomianem stopnia $d > 0$ o skończonej liczbie punktów krytycznych. Uzupełnijmy $\mathbb{C}^2$ w standardowy sposób do płaszczyzny rzutowej $\mathbb{P}^2$ i rozważmy domknięcie rzutowe C krzywej afinicznej o równaniu $f = 0$. Krzywa C jest zadana równaniem $F = 0$ gdzie F jest ujednorodnieniem wielomianu f a jej punkty w nieskończoności C_∞ są opisane przez część wiodącą $f^+(X,Y) = F(X,Y,0)$ wielomianu f. Oznaczmy $c = \#C_\infty$.

V. Formuła Krasińskiego.

Załóżmy, że $\deg_Y f = \deg f = d > 1$ i niech $\Delta = \mathrm{disc}_Y f$ będzie wyróżnikiem wielomianu f względem zmiennej Y. Wówczas

$$\sum_{p \in C_\infty} \mu_p(C) = d(d-2) - \deg \Delta + c.$$

Formuła powyższa pochodzi z rozprawy habilitacyjnej T. Krasińskiego [Kr]. Podamy tutaj nieznacznie zmodyfikowany dowód należący do tego tego autora.

Dowód. Zauważmy najpierw, że wielomiany f, $\partial f/\partial Y$ są względnie pierwsze (f ma skończoną liczbę punktów krytycznych) a więc $\Delta \neq 0$. Niech F będzie ujednorodnieniem f, wtedy $\partial F/\partial Y$ jest ujednorodnieniem $\partial f/\partial Y$ bo $\deg_Y f = \deg f$. Stosując twierdzenie Bezouta do pary F, $\partial F/\partial Y$ otrzymujemy

$$(f, \frac{\partial f}{\partial Y})_{\mathbb{C}^2} + \sum_{p \in C_\infty} (F, \frac{\partial F}{\partial Y}) = d(d-1) \tag{1}$$

Przypomnijmy ponadto, że

$$(f, \frac{\partial f}{\partial Y})_{\mathbb{C}^2} = \deg \Delta \tag{2}$$

gdyż wyróżnik Δ jest Y–rugownikiem pary wielomianów f, $\partial f/\partial Y$. Ze względu na założenie $\deg_Y f = \deg f$ zbiór C_∞ leży całkowicie w płaszczyźnie afinicznej określonej nierównością $X \neq 0$. Wprowadźmy współrzędne $Y_1 = Y/X$ oraz $Z_1 = Z/X$ i niech $g(Y_1, Z_1) = F(1, Y_1, Z_1)$. Mamy zatem

$$\sum_{p \in C_\infty} (F, \frac{\partial F}{\partial Y})_p = \sum_{p \in L} (g, \frac{\partial g}{\partial Y_1})_p = \sum_{p \in L} \mu_p(g) + d - c = \sum_{p \in C_\infty} \mu_p(C) + d - c \tag{3}$$

gdzie L jest prostą $Z_1 = 0$.

Rachunek powyższy oparty jest na lemacie Tessiera (por. [Kr], str. 17). Łącząc wzory (1), (2) i (3) otrzymujemy formułę V.

Dla każdego $t \in \mathbb{C}$ oznaczmy $f^t = f - t$. Zatem włókno $f^{-1}(t)$ jest krzywą afiniczną o równaniu $f^t = 0$. Domknięciem rzutowym włókna $f^{-1}(t)$ jest krzywa rzutowa $C_t \subset \mathbb{P}^2$ dana równaniem $F(X, Y, Z) - tZ^d = 0$. Oczywiście $(C_t)_\infty = C_\infty$. Dla każdego $p \in C_\infty$ oznaczamy $\mu_p^t = \mu_p(C_t)$. Istnieją liczby $\mu_p^{\text{gen}} \geq 0$ $(p \in C_\infty)$ takie, że $\mu_p^t \geq \mu_p^{\text{gen}}$ dla $t \in \mathbb{C}$ przy czym $\mu_p^t = \mu_p^{\text{gen}}$ dla prawie wszystkich (wszystkich z wyjątkiem skończonej ilości) $t \in \mathbb{C}$. Bezpośredni dowód tego faktu, czytelnik znajdzie w [Kr] (strony 31–37). Zatem zbiór $\Lambda(f) = \{\, t \in \mathbb{C} : \mu_p^t > \mu_p^{\text{gen}}$ dla pewnego $p \in C_\infty \,\}$ jest skończony a wielkości

$$\lambda^t(f) = \sum_{p \in C_\infty} (\mu_p^t - \mu_p^{\text{gen}})$$

oraz

$$\lambda(f) = \sum_{t \in \mathbb{C}} \lambda^t(f)$$

są dobrze zdefiniowane i dają pewną informację o zachowaniu sie w nieskończoności włókien $f^{-1}(t)$ oraz odwzorowania $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$.

Ponadto dogodne jest pojęcie liczby Milnora włókna $f^{-1}(t)$

$$\mu^t(f) = \sum_{p \in f^{-1}(t)} \mu_p(f)$$

Łatwo zauważyć, że globalna liczba Milnora $\mu(f)$ jest sumą

$$\mu(f) = \sum_{t \in \mathbb{C}} \mu^t(f).$$

Korzystając z formuły Krasińskiego charakterystyki $\Lambda(f)$ i $\lambda^t(f)$ można opisać efektywnie. Ponieważ nie zmieniają się one przy liniowej zmianie zmiennych X,

Y, możemy założyć, że $\deg_Y f = \deg f = d$. Ten sam warunek jest spełniony przez wielomian f^t. Oznaczmy $\Delta(T,X) = \mathrm{disc}_Y(f(X,Y)-T)$ i niech $\Delta(T,X) = \Delta_0(T)X^N + \Delta_1(T)X^{N-1} + \cdots + \Delta_N(T)$ gdzie $\Delta_0(T) \neq 0$ w $\mathbb{C}[T]$. Stosując formułę Krasińskiego łatwo sprawdzamy, że $\Lambda(f) = \{t \in \mathbb{C} : \Delta_0(T) = 0\}$ oraz $\lambda^t(f) = N - \deg_X(\Delta(X,t))$.

Zajmiemy się teraz charakterystyką Eulera włókien $f^{-1}(t)$. Z formuły IV wynika natychmiast

$$\textbf{(VI)} \qquad \chi(f^{-1}(t)) = \chi(C_t) - c$$

Podstawowe znaczenie ma

VII. Formuła Ephraima.

Przy wprowadzonych oznaczeniach charakterystyka $\chi(f^{-1}(t))$ *jest stała prawie wszędzie oraz*

$$1 = \chi(f^{-1}(t_{\mathrm{gen}})) + \sum_{t\in\mathbb{C}} \big(\chi(f^{-1}(t))) - \chi(f^{-1}(t_{\mathrm{gen}}))\big).$$

Tutaj $t_{\mathrm{gen}} \in \mathbb{C}$ jest "liczbą generyczną"; oznacza to, że formuła VII jest prawdziwa dla prawie wszystkich $t_{\mathrm{gen}} \in \mathbb{C}$. Explicite występuje ona w pracy [E]. Tego typu formuły wiązane z nazwiskiem Lefschetza wspomniane są również w [GH]. Łatwo zauważyć, że na mocy VI formuła VII jest równoważna następującej:

$$1 + c = \chi(C_{t_{\mathrm{gen}}}) + \sum_{t\in\mathbb{C}} \big(\chi(C_t) - \chi(C_{t_{\mathrm{gen}}})\big) \tag{4}$$

Dowód powyższej formuły czytelnik znajdzie w dalszej części tego artykułu. Teraz podamy pewne zastosowania.

VIII. Formuła Cassou–Noguès.

Przy wprowadzonych oznaczeniach

$$d(d-3) = \sum_{p\in C_\infty} \mu_p^{\mathrm{gen}} - c + \mu(f) + \lambda(f) - 1.$$

Formuła powyższa została podana przez autorkę w pracy [CN]. Podamy tutaj dowód w oparciu o wzory VII i I zupełnie różny od oryginalnego.

Dowód. Stosując formułę I do krzywej C_t otrzymujemy

$$\chi(C_t) = -d(d-3) + \mu^t(f) + \sum_{p\in C_\infty} \mu_p^t \tag{5}$$

Gdy $t = t_{\rm gen}$ jest wartością generyczną to na podstawie twierdzenia Sarda krzywa $f^t = 0$ jest nieosobliwa i otrzymujemy

$$\chi(C_{t_{\rm gen}}) = -d(d-3) + \sum_{p \in C_\infty} \mu_p^{\rm gen} \tag{6}$$

Ze związków (4) i (5) otrzymujemy:

$$\chi(C_t) - \chi(C_{t_{\rm gen}}) = \mu^t(f) + \lambda^t(f) \tag{7}$$

Podstawiając wzory (6) i (7) do (4) dostajemy formułę Cassou–Noguès.

IX. Formuła Ephraima–Gavrilowa.

$$\chi(f^{-1}(t)) = 1 - \mu(f) - \lambda(f) + \mu^t(f) + \lambda^t(f).$$

Dowód. Ze wzoru (6) i formuły Cassou–Noguès dostajemy $\chi(C_{t_{\rm gen}}) = 1 + c - \mu(f) - \lambda(f)$. A więc na podstawie VI

$$\chi(f^{-1}(t_{\rm gen})) = 1 - \mu(f) - \lambda(f) \tag{8}$$

Ze wzoru (7) otrzymujemy:

$$\chi(f^{-1}(t)) - \chi(f^{-1}(t_{\rm gen})) = \mu^t(f) + \lambda^t(f) \tag{9}$$

Łącząc (8) i (9) dostajemy formułę IX.

Przypomnijmy, że punkt $t \in \mathbb{C}$ jest punktem bifurkacyjnym wielomianu f wtedy i tylko wtedy, gdy t jest wartością krytyczną f (w sensie Sarda) lub gdy $t \in \Lambda(f)$. Zatem t nie jest punktem bifurkacyjnym dokładnie wtedy, gdy $\mu^t(f) = 0$ i $\lambda^t(f) = 0$. Możemy zatem stwierdzić, że:

* jeżeli t nie jest punktem bifurkacyjnym f to $\chi(f^{-1}(t)) = 1 - \mu(f) - \lambda(f)$,

** jeżeli t jest punktem bifurkacyjnym f to $\chi(f^{-1}(t)) > 1 - \mu(f) - \lambda(f)$.

Charakteryzacja włókien "typowych" (tzn. postaci $f^{-1}(t)$ gdzie t nie jest punktem bifurkacyjnym) jako włókien o minimalnej charakterystyce Eulera została podana w pracy [HL].

X. Globalna formuła Tessiera.

Jeżeli $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ *ma skończoną liczbę punktów krytycznych i* $\deg_Y f = \deg f = d > 0$*, to*

$$(f, \frac{\partial f}{\partial Y})_{\mathbb{C}^2} = \mu(f) + \sum_{t \neq 0} \lambda^t(f) + d - 1.$$

Powyższa formuła wynika łatwo z formuły Krasińskiego i formuły Cassou–Noguès. Wynika z niej natychmiast

Wniosek. *Przy założeniach formuły* **X**

$$(f, \frac{\partial f}{\partial Y})_{\mathbb{C}^2} \geq \mu(f) + d - 1$$

Równość zachodzi dokladnie wtedy, gdy $\Lambda(f) \subset \{0\}$*.*

Powyższa nierówność została udowodniona bezpośrednio w [CK] i [Kr] gdzie zostały podane zastosowania do hipotezy jakobianowej.

Całkowanie względem charakterystyki Eulera

Celem tego rozdziału jest podanie zwięzłych dowodów formuł I, II, IV i VII.

W dowodach posłużymy się techniką całkowania względem charakterystyki Eulera. Była ona stosowana przez matematyków rosyjskich już w latach siedemdziesiątych. Szerzej spopularyzował ją O. Viro w [V]. Poniżej przedstawimy krótki zarys tej teorii. Ograniczymy sie w nim do kategorii zbiorów i odwzorowań semialgebraicznych.

Charakterystyka Eulera.

Załóżmy, że X jest przestrzenią topologiczną dla której grupa homologii singularnych $H(X,\mathbb{R})$ jest przestrzenią wektorową skończonego wymiaru. Jej charakterystyką Eulera nazywamy liczbę $\chi(X)=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\dim H_i(X,\mathbb{R})$. W topologii algebraicznej dowodzi się, że dowolna triangulowalna przestrzeń topologiczna spełnia powyższe założenie. Wynika stąd, że zwarte zbiory semialgebraiczne mają skończone charakterystyki Eulera.

Odnotujmy kilka podstawowych własności charakterystyki:

(1) jeśli $X=\bigcup_{i=1}^n e_i$ jest rozbiciem zwartego zbioru X na komórki, to $\chi(X)=\sum_{i=1}^n(-1)^{\dim e_i}$,
(2) jeśli X i Y są homotopijnie równoważne, to $\chi(X)=\chi(Y)$,
(3) jeśli A jest zbiorem skończonym z topologią dyskretną to $\chi(A)=\#A$.

Funkcje konstruowalne, całka.

Definicja. Niech V będzie zbiorem semialgebraicznym (afinicznym lub rzutowym). Funkcję $f:V\to\mathbb{R}$ nazywamy konstruowalną gdy:
(a) f jest skończoną kombinacją liniową funkcji charakterystycznych podzbiorów semialgebraicznych zbioru V,
(b) Domknięcie $f^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ jest zbiorem zwartym.

Twierdzenie. *Dowolna funkcja konstruowalna $f:V\to\mathbb{R}$ ma reprezentację $f=\alpha_1 1\!\!1_{K_1}+\cdots+\alpha_s 1\!\!1_{K_s}$ gdzie K_i są zwartymi podzbiorami semialgebraicznymi V a $1\!\!1_A$ oznacza funkcję charakterystyczną zbioru A.*

Twierdzenie i definicja. *Niech $f:V\to\mathbb{R}$ będzie funkcją konstruowalną jak wyżej. Liczba $\int_V f\,d\chi=\sum\alpha_i\chi(K_i)$ nie zależy od reprezentacji funkcji f. Nazywamy ją całką z f względem charakterystyki Eulera.*

Przykład. Weźmy dwa zwarte zbiory semialgebraiczne K, $L\subset V$. Jest $1\!\!1_{K\cup L}=1\!\!1_K+1\!\!1_L-1\!\!1_{K\cap L}$. Z powyższego twierdzenia wynika, że możemy tę równość scałkować stronami. Otrzymujemy zatem $\chi(K\cup L)=\chi(K)+\chi(L)-\chi(K\cap L)$.

Twierdzenie typu Fubiniego. *Niech $f:A\to B$ będzie ciągłym odwzorowaniem semialgebraicznym ze zwartego zbioru A. Wtedy:*
(a) $h:B\ni b\to h(b)=\chi(f^{-1}(b))$ jest funkcją konstruowalną,
(b) $\chi(A)=\int_B h\,d\chi$.

Przykład. Sprawdzimy, że charakterystyka Eulera okręgu jest równa zero. Weźmy w tym celu okrąg O o równaniu $x^2+y^2=1$ i rozważmy rzutowanie $p: O \ni (x,y) \to x \in \mathbb{R}$.

Dla x z przedziału $(-1,1)$ zbiór $p^{-1}(x)$ jest dwuelementowy, jeśli $x = \pm 1$ to $\# p^{-1}(x) = 1$, dla pozostałych $x \in \mathbb{R}$ $p^{-1}(x) = \emptyset$. Dlatego funkcja $h(x) = \chi(p^{-1}(x))$ jest równa $2\mathbb{1}_{(-1,1)} + \mathbb{1}_{\{-1\}} + \mathbb{1}_{\{1\}} = 2\mathbb{1}_{[-1,1]} - \mathbb{1}_{\{-1\}} - \mathbb{1}_{\{1\}}$. Na mocy twierdzenia Fubiniego $\chi(O) = \int_{\mathbb{R}} h\, d\chi = 2\chi([-1,1]) - \chi(\{-1\}) - \chi(\{1\}) = 0$.

Wyprowadzenie formuły II.

Niech $\nu : \tilde{C} \to C$ będzie normalizacją krzywej rzutowej C. Dla dowolnego punktu $p \in C$ włókno $\nu^{-1}(p)$ ma krotność $r_p(C)$. Dlatego funkcja $h : C \ni p \to \chi(\nu^{-1}(p))$ równa $h(p) = r_p(C)$ ma reprezentację $h = \mathbb{1}_C + \sum_{p\in C}(r_p(C)-1)\mathbb{1}_{\{p\}}$. Suma w tym wzorze jest faktycznie skończona bo $r_p(C) \neq 1$ tylko dla skończonej liczby punktów.

Na podstawie wzoru Fubiniego

$$\chi(\tilde{C}) = \int_C h\, d\chi = \chi(C) + \sum_{p\in C}(r_p(C) - 1).$$

Wyprowadzenie formuły IV.

Potraktujmy C jako przestrzeń topologiczną z topologią indukowaną z $\mathbb{P}^2$. Wykorzystamy dobrze znany fakt, że do każdego punktu $p \in C$ można dobrać dowolnie małe otoczenie domknięte B_p homeomorficzne ze skończoną sumą rozłącznych kół z utożsamionymi środkami. Brzeg zbioru B_p jest homeomorficzny z sumą brzegów tych kół czyli z sumą skończonej ilości okręgów. Wynika stąd, że zbiór B_p jest ściągalny do punktu p oraz, że brzeg ∂B_p jest mocnym retraktem deformacyjnym $B_p \setminus \{p\}$.

Dobierzmy do każdego z punktów $p \in F$ otoczenie B_p o powyższych wlasnościach na tyle małe aby B_p i B_q były rozłączne dla $p \neq q$, $p, q \in F$ i połóżmy $K = \bigcup_{p\in F} B_p$, $L = \mathrm{cl}(C \setminus K)$. Z opisu zbiorów B_p wynika, że F jest retraktem deformacyjnym K, L jest retraktem deformacyjnym $C \setminus F$ oraz, że $K \cap L$ jest homeomorficzny ze skończoną sumą rozłącznych okręgów. Zatem $\chi(K) = \chi(F) = k$, $\chi(L) = \chi(C \setminus F)$, $\chi(K \cap L) = 0$. Ostatecznie $\chi(C) = \chi(K \cup L) = \chi(K) + \chi(L) - \chi(K \cap L) = \chi(C \setminus F) + k$.

Wyprowadzenie formuły I.

Bez utraty ogólności możemy założyć, że krzywa rzutowa C stopnia d przecina prostą w nieskończoności $\{Z = 0\}$ w dokładnie d punktach, co więcej punkt (0:1:0) nie należy do C. Z powyższego zalożenia wynika, że wszystkie punkty w nieskończoności krzywej C są nieosobliwe. Krzywa C jest zbiorem zer wielomianu jednorodnego $F(X,Y,Z)$ stopnia d. Z założenia o położeniu krzywej względem prostej w nieskończoności wynika, że $F(X,Y,0)$ rozpada się na iloczyn d różnych czynników liniowych a więc krzywe C i $\partial F/\partial Y = 0$ nie mają wspólnych punktów w nieskończoności.

Dla obliczenia charakterystyki Eulera C weźmy odwzorowanie

$$\pi : C \ni (x{:}y{:}z) \to (x{:}z) \in \mathbb{P}^1$$

i wyliczmy charakterystyki Eulera zbiorów $\pi^{-1}(p)$ dla $p \in \mathbb{P}^1$.

Włókno $\pi^{-1}(p)$ dla $p = (x{:}y)$ jest zbiorem punktów przecięcia krzywej C z prostą $zX - xZ = 0$. W przypadku gdy $p = (1{:}0)$ $\pi^{-1}(p) = C \cap \{Z = 0\}$ a zatem $\#\pi^{-1}(p) = d$. Dla $p = (x{:}1)$ jedynym punktem w nieskończoności prostej l_x: $X - xZ = 0$ jest $(0{:}1{:}0)$. Ponieważ na mocy założenia nie należy on do krzywej C więc dalsze rachunki możemy prowadzić we współrzędnych afinicznych (X, Y). W tych współrzędnych równania l_x i C przyjmują postać odpowiednio $X - x = 0$ i $f(X, Y) = 0$ gdzie $f(X, Y) = F(X, Y, 1)$. Dla dowolnego punktu przecięcia $r \in l_x \cap C$ mamy formułę Teissiera

$$1 = (f, X - x)_r + (\frac{\partial f}{\partial X}, \frac{\partial f}{\partial Y})_r - (f, \frac{\partial f}{\partial Y})_r$$

Po zsumowaniu

$$\begin{aligned} \#\pi^{-1}(p) &= \sum_{r \in l_x \cap C} [(f, X - x)_r + (\frac{\partial f}{\partial X}, \frac{\partial f}{\partial Y})_r - (f, \frac{\partial f}{\partial Y})_r] \\ &= d + \sum_{r \in l_x \cap C} [(\frac{\partial f}{\partial X}, \frac{\partial f}{\partial Y})_r - (f, \frac{\partial f}{\partial Y})_r]. \end{aligned}$$

Skorzystaliśmy tutaj z twierdzenia Bezouta: $\sum_{r \in l_x \cap C} (f, X - x)_r = d$.

Ostatecznie możemy stwierdzić że funkcja $h : \mathbb{P}^1 \ni p \to \chi(\pi^{-1}(p))$ ma reprezentację

$$h = d\mathbb{1}_{\mathbb{P}^1} + \sum_{x \in \mathbb{C}} \sum_{r \in l_x \cap C} [(\frac{\partial f}{\partial X}, \frac{\partial f}{\partial Y})_r - (f, \frac{\partial f}{\partial Y})_r] \mathbb{1}_{\{(x:1)\}}$$

Suma w powyższym wzorze jest faktycznie skończona bo tylko dla skończenie wielu $x \in \mathbb{C}$ proste l_x przecinają punkty osobliwe krzywej C lub punkty wspólne krzywych C i $\partial f / \partial Y = 0$. Na mocy twierdzenia Fubiniego

$$\begin{aligned} \chi(C) = \int_{\mathbb{P}^1} h \, d\chi &= d\chi(\mathbb{P}^1) + \sum_{x \in \mathbb{C}} \sum_{r \in l_x \cap C} [(\frac{\partial f}{\partial X}, \frac{\partial f}{\partial Y})_r - (f, \frac{\partial f}{/} \partial Y)_r] \chi(\{x{:}1\}) \\ &= 2d + \sum_{f(r)=0} [(\frac{\partial f}{\partial X}, \frac{\partial f}{\partial Y})_r - (f, \frac{\partial f}{\partial Y})_r] \end{aligned}$$

Z założenia o położeniu krzywej C względem prostej w nieskończoności wynika, że $\sum_{f(r)=0} (\partial f / \partial X, \partial f \partial Y)_r = \sum_{p \in C} \mu_p(C)$ oraz na mocy twierdzenia Bezouta $\sum_{f(r)=0} (f, \partial f / \partial Y)_r = d(d - 1)$ (bo krzywe $f = 0$ i $\partial f / \partial Y = 0$ nie przecinają się w nieskończoności). Wstawiając te związki do poprzedniego wzoru otrzymujemy formułę I.

Wyprowadzenie formuły VII.

Zachowajmy oznaczenia z poprzedniego rozdziału. Obliczymy na dwa sposoby charakterystykę Eulera powierzchni

$$V = \{ (x{:}y{:}z); (t{:}s)) \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 : sF(x,y,z) - tz^d = 0 \}.$$

Sposób 1: Niech p będzie restrykcją do zbioru V rzutowania $\pi : \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$. Dla $a = (t{:}1) \in \mathbb{P}^1$ włókno $p^{-1}(a)$ jest homeomorficzne z krzywą C_t. Jeśli $a = (1{:}0)$ to $p^{-1}(a) \simeq \{ (x{:}y{:}z) \in \mathbb{P}^2 : z^d = 0 \} \simeq \mathbb{P}^1$. Wobec tego funkcja $h : \mathbb{P}^1 \ni a \to \chi(p^{-1}(a))$ jest równa

$$\begin{aligned} h =& \sum_{t\in\mathbb{C}} \chi(C_t) \mathbb{1}_{\{(t:1)\}} + \chi(\mathbb{P}^1)\mathbb{1}_{\{(1:0)\}} \\ =& \chi(C_{\mathrm{gen}})\mathbb{1}_{\mathbb{P}^1} + \sum_{t\in\mathbb{C}} (\chi(C_t) - \chi(C_{\mathrm{gen}}))\mathbb{1}_{\{(t:1)\}} + (2 - \chi(C_{\mathrm{gen}}))\mathbb{1}_{\{(1:0)\}}. \end{aligned}$$

Z twierdzenia Fubiniego

$$\begin{aligned} \chi(V) =& \int_{\mathbb{P}^1} h\, d\chi = 2\chi(C_{\mathrm{gen}}) + \sum_{t\in\mathbb{C}} (\chi(C_t) - \chi(C_{\mathrm{gen}})) + 2 - \chi(C_{\mathrm{gen}}) \\ =& 2 + \chi(C_{\mathrm{gen}}) + \sum_{t\in\mathbb{C}} (\chi(C_t) - \chi(C_{\mathrm{gen}})). \end{aligned}$$

Sposób 2: Niech q będzie restrykcją do zbioru V rzutowania $\pi : \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$. Dla wszystkich $a = (x{:}y{:}z)$ dla krórych $F(x,y,z) \neq 0$ lub $z \neq 0$ włókna $q^{-1}(a)$ są jednoelementowe. Z kolei jeśli $a = (x{:}y{:}0)$ i $F(x,y,0) = 0$ to $q^{-1}(a) \simeq \mathbb{P}^1$. Takich punktów jest jednak tylko skończona ilość i są to dokładnie punkty zbioru C_∞. W takim razie funkcja $h : \mathbb{P}^2 \ni a \to \chi(q^{-1}(a))$ jest równa

$$h = \mathbb{1}_{\mathbb{P}^2} + \sum_{p \in C_\infty)=0} \mathbb{1}_{\{p\}}$$

Z twierdzenia Fubiniego

$$\chi(V) = \int_{\mathbb{P}^2} h\, d\chi = \chi(\mathbb{P}^2) + \sum_{p\in C_\infty} \chi(\{p\}) = 3 + c.$$

Odejmując stronami oba wzory na charakterystykę zbioru V dostajemy VII.

Bibliografia

[BK] E. Brieskorn, H. Knörrer, *Ebene algebraishe Kurven*, Birkhäuser, Basel–Boston–Stuttgart, 1981.

[BR] B. Benedettini, J. J. Risler, *Real algebraic and semi–algebraic sets*, Hermann, Paris, 1990.

[CN] P. Cassou–Noguès, *Sur la généralisation d'un théorème de Kouchnirenko*, Compositio Math. 103 (1996), 95–121.

[CK] J. Chądzyński, T. Krasiński, *Properness and the Jacobian conjecture in* $\mathbb{C}^2$, Bull. Soc. Sci. Lett., Łódź, (1992), Vol. XIV, 132, 13–19.

[E] R. Ephraim, *Special polars and curves with one place at infinity*, Proc. of Symp. in Pure h Math. **40 Part 1** (1983), 353–359.

[G] L. Gavrilov, *On the topology of polynomials in two complex variables*, Universitè de Tolouze, preprint 1994.

[GH] P. A. Griffiths, J. Harris,, *Principles of Algebraic Geometry*, John Wiley and Sons, 1978.

[HL] Hà Huy Vui, Lê Dûng Trâng, *Sur la topologie des polynomes complexes*, Acta Math. Viet. **99** (1984), 21–32.

[Kr] T. Krasiński, *Poziomice wielomianów dwóch zmiennych a hipoteza jakobianowa* (1991), Wydawnictwo UŁ, Łódź.

[Pl] A. Płoski, *The Milnor number of a plane algebroid curve* (1995), Materiały XVI Konferencji Szkoleniowej z Analizy i Geometrii Zespolonej, Łódź.

[V] O. Viro, *Some integral calculus based on Euler characteristic*, Lect. Notes in Math., vol. 1346, 1989.

[Ki] F. Kirwan, *Complex Algebraic Curves*, Cambridge University Press, 1992.

[Ph] F. Pham, *Courbes discriminantes des singularitès planes d'ordre 3*, Astèrisque 7 et 8 (1973), 363–391.

The Euler characteristic and singularities at infinity of algebraic curves.

Summary. In the paper we give a review of formulae connecting local invariants of plane curves singularities and the Euler characteristic. Our intention was to complete the collection given by F. Pham in [Ph].

Bronisławów, 12 – 16 stycznia, 1998 r.