MATERIAŁY NA XXVIII KONFERENCJĘ SZKOLENIOWĄ Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ ZESPOLONEJ

2007 **Łódź** **str. 9**

O PROBLEMIE ARNOLDA Z 1982 ROKU

Janusz Gwoździewicz, Andrzej Lenarcik (Kielce)

Streszczenie

Podajemy elementarne rozwiązanie problemu **1982-16** z książki Arnold's Problems.

Dla dowolnego szeregu formalnego $f \in \mathbf{C}[[x_1, \ldots, x_n]]$ postaci

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^n} a_\alpha x^\alpha \qquad \text{gdzie } x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \tag{1}$$

określamy $\mathrm{supp}(f) = \{\, \alpha \in \mathbf{N}^n : a_\alpha \neq 0 \,\}$ oraz Δ_f jako otoczkę wypukłą zbioru $\{\, \alpha + v : \alpha \in \mathrm{supp}(f), v \in \mathbf{R}^n_+ \,\}$. Zbiór Δ_f nazywamy wielościanem Newtona szeregu f. Jeśli wielościan Newtona Δ dotyka wszystkich osi układu współrzędnych, to nazywamy go dogodnym. W takim przypadku obszar pod Δ czyli dopełnienie Δ do $\mathbf{R}^n_+$ ma skończoną objętość.

W książce z problemami z seminarium Arnolda [A] jest zadanie

1982-16. Consider a Newton polyhedron Δ in $\mathbf{R}^n$ and the number $\mu(\Delta) = n!\,V - \sum(n-1)!\,V_i + \sum(n-2)!\,V_{ij} - \cdots$, where V is the volume under Δ, V_i is the volume under Δ on the hyperplane $x_i = 0$, V_{ij} is the volume under Δ on the hyperplane $x_i = x_j = 0$, and so on.

Then $\mu(\Delta)$ grows (non strictly monotonically) as Δ grows[1] (whenever Δ remains convex *and integer*?). *There is no elementary proof even for* $n = 2$.

[1] Relację $\Delta \leq \Delta'$ rozumiemy jako $\Delta \supset \Delta'$

Dla $n = 2$ problem jest anonsowany jako rozwiązany, lecz bez podania dokładnego cytowania. Przedstawimy proste rozwiązanie tego zadania dla $n = 2$ a później pokażemy jak z półciągłości liczby Milnora wynika przypadek ogólny.

Jeżeli $\Delta \subset \mathbf{R}^2_+$ jest dogodnym diagramem Newtona, to

$$\mu(\Delta) = 2S - a - b + 1 ,$$

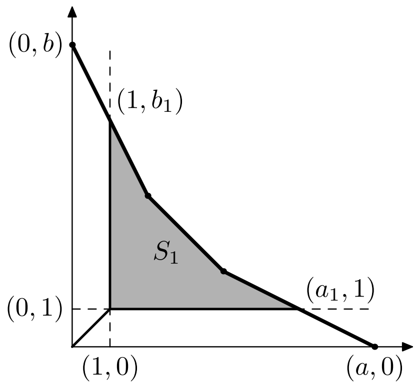
gdzie S jest polem pomiędzy diagramem Δ i osiami, zaś $(a, 0)$ oraz $(0, b)$ są odpowiednio wierzchołkami diagramu na osi poziomej i pionowej.

Murem nazywamy podzbiór pierwszej ćwiartki złożony z punktów, których odległość od osi układu jest nie większa niż jeden.

Propozycja 1 *Niech Δ będzie dogodnym diagramem Newtona ograniczającym pole S_1 poza murem. Niech $(a_1, 1)$ oraz $(1, b_1)$ będą punktami brzegu diagramu, których odległość od osi wynosi dokładnie 1. Wówczas*

$$\mu(\Delta) = 2S_1 + a_1 + b_1 - 1 . \tag{2}$$

Dowód. Mamy $S = S_1 + \frac{a+a_1-1}{2} + \frac{b+b_1-1}{2}$, skąd po elementarnych przekształceniach otrzymujemy tezę.



Wniosek 2 *Jeżeli $\Delta \supset \Delta'$ są dogodnymi diagramami Newtona, to $\mu(\Delta) \leq \mu(\Delta')$.*

Dowód. Przyjmując odpowiednio dla Δ i Δ' oznaczenia S, a_1, b_1 oraz S', a'_1, b'_1, tak jak w Propozycji 1, otrzymamy $S_1 \leq S'_1$, $a_1 \leq a'_1$ oraz $b_1 \leq b'_1$, skąd wobec (2) otrzymujemy tezę.

Przejdźmy teraz do przypadku ogólnego. Mamy

Twierdzenie 3 (Kusznirenko [K])
Jeżeli f jest szeregiem o dogodnym wielościanie Newtona, to

$$\mu_0(f) \geq \mu(\Delta_f) ,$$

i dla szeregów niezdegenerowanych zachodzi równość.

Warunek niedegeneracji (zob. [K]) jest spełniony dla generycznych szeregów o ustalonym wielościanie Newtona Δ. Mówiąc dokładniej, niech A będzie zbiorem punktów kratowych należących do brzegu Δ. Wówczas istnieje właściwy podzbiór algebraiczny $D \subset (\mathbf{C})_{\alpha \in A}$ taki, że dowolny szereg f postaci (1) o diagramie Δ jest niezdegenerowany o ile układ współczynników $(a_\alpha)_{\alpha \in A}$ nie należy do D.

Niech $\Delta \supset \Delta'$ będą dowolnymi dogodnymi wielościanami Newtona. Weźmy niezdegenerowane szeregi f, g takie, że $\Delta_f = \Delta$, $\Delta_g = \Delta'$, załóżmy dodatkowo, że f spełnia warunek z poprzedniego akapitu i rozpatrzmy rodzinę

$$F_f(x) = tf(x) + (1-t)g(x)$$

parametryzowaną $t \in \mathbf{C}$. Wówczas:

(i) $F_0(x) = g(x)$, $F_1(x) = f(x)$

(ii) $\Delta_{F_t} = \Delta$ dla wszystkich $t \in \mathbf{C}$ poza skończoną liczbą

(iii) szereg F_t jest niezdegenerowany dla wszystkich $t \in \mathbf{C}$ poza skończoną liczbą

Aby sprawdzić (ii), weźmy $f(x) = \sum a_\alpha x^\alpha$, $g(x) = \sum b_\alpha x^\alpha$. Jeśli t nie spełnia żadnego z równań

$$ta_\alpha + (1-t)b_\alpha = 0$$

gdzie $\alpha \in A \cap \operatorname{supp}(f)$ to $A \cap \operatorname{supp}(F_t) = A \cap \operatorname{supp}(f)$ i wówczas $\Delta_{F_t} = \Delta$.

Podobnie sprawdzamy (iii). Układy współczynników $(ta_\alpha + (1-t)b_\alpha)_{\alpha \in A}$ wyznaczają prostą zawartą w $(\mathbf{C})_{\alpha \in A}$ przechodzącą przez punkty $(a_\alpha)_{\alpha \in A}$ i $(b_\alpha)_{\alpha \in A}$. Ponieważ pierwszy z tych punktów nie należy do zbioru D więc nasza prosta przecina D w skończonej liczbie punktów (bo D jest zbiorem algebaicznym) a więc szereg F_t jest zdegenerowany tylko dla skończonej liczby parametrów $t \in \mathbf{C}$.

Na podstawie twierdzenia Kusznirenki oraz (i)–(iii) dostajemy:

$$\begin{aligned} \mu_0(F_t) &= \mu(\Delta) \qquad \text{dla } t \neq 0 \text{ dostatecznie bliskich } 0 \\ \mu_0(F_0) &= \mu(\Delta') \end{aligned}$$

Z półciągłości liczby Milnora (zob. [T] str. 39) dostajemy nierówność $\mu_0(F_0) \geq \mu_0(F_t)$ a więc $\mu(\Delta) \leq \mu(\Delta')$.

Literatura

[A] V.I. Arnold, *Arnold's Problems*, Springer 2004

[K] A.G. Kouchnirenko, *Polyèdres de Newton et nombres de Milnor*, Invent. Math., 32 (1976), 1–31.

[T] J.C. Tougeron, *Ideaux de fonctions différentiables*, Ergebnisse der Mathematik, Springer-Verlag, (1972)

On Arnold's problem

Summary. We give an elementary solution of a problem **1982-16** from the book Arnold's Problems.

Łódź, 8 – 12 stycznia 2007 r.