**MATERIAŁY NA XXVII KONFERENCJĘ SZKOLENIOWĄ
Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ
ZESPOLONEJ**

2006 **Łódź** **str. 33**

FORMUŁY TYPU KUSZNIRENKI DLA LOKALNYCH NIEZMIENNIKÓW KRZYWYCH ANALITYCZNYCH

Janusz Gwoździewicz (Kielce)

Streszczenie

Niech $f = 0$, $g = 0$ będą równaniami krzywych analitycznych określonych w otoczeniu zera na płaszczyźnie C^2 oraz niech $\pi : M \to (C^2, 0)$ będzie lokalną modyfikacją toryczną. Podajemy formuły które wiążą liczbę Milnora $\mu_0(f)$ z sumą liczb Milnora $\sum_p \mu_p(\tilde{f})$ rozciągniętą na punkty przecięcia przeciwobrazu właściwego krzywej $f = 0$ z dywizorem wyjątkowym. Wyprowadzamy też podobne wzory dla krotności przecięcia $(f, g)_0$. Uzyskane formuły uogólniają twierdzenia Kusznirenki i Bernsteina oraz klasyczne twierdzenie Noethera dla krotności przecięcia po rozdmuchaniu.

1 Twierdzenia Kusznirenki i Bernsteina

Niech $f \in C\{x, y\}$ będzie szeregiem dla którego ani $f(x, 0)$ ani $f(0, y)$ nie jest tożsamościowo równe 0. Taki szereg nazywamy dogodnym.

Dla szeregu dogodnego $f(x, y) = \sum_{ij} a_{ij} x^i y^j$ określamy jego nośnik supp$f$ jako zbiór indeksów przy niezerowych współczynnikach

$$\mathrm{supp} f = \{\,(i,j) : a_{ij} \neq 0\,\}$$

oraz diagram Newtona Δ_f jako otoczkę wypukłą zbioru supp$f + R_+^2$. Z warunku dogodności szeregu f wynika, że $a_{i0} \neq 0$ oraz $a_{0j} \neq 0$ dla pewnych i, j a więc brzeg Δ_f ma punkty wspólne z obydwiema osiami. Fragment brzegu Δ_f będący mnogościową sumą jego zwartych odcinków nazywamy łamaną Newtona szeregu f i oznaczamy $\mathcal{N}_f$.

Wprowadźmy dalsze oznaczenia. Dla diagramu Newtona Δ którego łamana Newtona $\mathcal{N}$ dotyka osi w punktach $(a, 0)$ i $(0, b)$ oznaczamy:

- $P(\Delta) = \mathrm{Pole}\,(R_+^2 \setminus \Delta)$
- $\mu(\Delta) = 2P(\Delta) - a - b + 1$
- $r(\Delta) =$ liczba odcinków na które dzielą łamaną Newtona $\mathcal{N}$ punkty kratowe
- $\delta(\Delta) = (\mu(\Delta) + r(\Delta) - 1)/2$

Jeśli Δ_1, Δ_2 są dwoma diagramami Newtona to ich polem Mińkowskiego nazywamy wielkość $[\Delta_1, \Delta_2] = P(\Delta_1 + \Delta_2) - P(\Delta_1) - P(\Delta_2)$.

W latach 70–tych ubiegłego wieku grupa matematyków skupionych wokół Arnolda podała wzory na wiele niezmienników osobliwości w terminach diagramów Newtona. Zacytujemy ważne dla dalszego tekstu wyniki (zob. [K], [Ch]).

Twierdzenie 1 *Niech $f, g \in C\{x, y\}$ będą szeregami dogodnymi. Wtedy*

$$(f, g)_0 \geq [\Delta_f, \Delta_g] \tag{1}$$

$$\delta_0(f) \geq \delta(\Delta_f) \tag{2}$$

$$\mu_0(f) \geq \mu(\Delta_f) \tag{3}$$

$$r_0(f) \leq r(\Delta_f) \tag{4}$$

Jeśli współczynniki szeregów $f(x, y)$, $g(x, y)$ o indeksach odpowiednio ze zbiorów $\mathcal{N}_f$, $\mathcal{N}_g$ są dostatecznie ogólne to w powyższych wzorach są równości.

W twierdzeniu: $\delta_0(f)$, oznacza liczbę punktów podwójnych krzywej $f = 0$ w zerze, $\mu_0(f)$ liczbę Milnora f w zerze, $r_0(f)$ jest liczbą gałęzi krzywej $f = 0$ przechodzących przez 0 oraz $(f, g)_0$ oznacza indeks przecięcia f i g w zerze. Słowo "dostatecznie ogólne" w drugiej części twierdzenia oznacza, że współczynniki szeregów $f(x, y)$, $g(x, y)$ o indeksach odpowiednio ze zbiorów $\mathcal{N}_f$, $\mathcal{N}_g$ (takich współczynników jest skończona ilość) leżą w pewnym gęstym zbiorze konstuowalnym. Równania tego zbioru są to tak zwane warunki niedegeneracji (zobacz §2 w [Ch]).

2 Twierdzenie Noethera

Niech $f = 0$, $g = 0$ będą równaniami krzywych analitycznych określonych w otoczeniu zera na płaszczyźnie C^2. Jeśli $\sigma : M \to C^2$ jest rozdmuchaniem C^2 w zerze to klasyczne formuły wiążą niezmieniki osobliwości tych krzywych w zerze z niezmiennikami osobliwości ich przeciwobrazów właściwych.

Twierdzenie 2 *Załóżmy, że krzywe $f = 0$, $g = 0$ nie mają wspólnych składowych Jeśli $\tilde{f} = 0$, $\tilde{g} = 0$ są lokalnymi równaniami ich przeciwobrazów właściwych przy rozdmuchaniu σ to*

(5)
$$(f, g)_0 = (\operatorname{ord}_0 f)(\operatorname{ord}_0 g) + \sum_{p \in \sigma^{-1}(0)} (\tilde{f}, \tilde{g})_p$$

Jeśli krzywa $f = 0$ nie ma składowych wielokrotnych, to

(6)
$$\delta_0(f) = (\operatorname{ord}_0 f)(\operatorname{ord}_0 f - 1)/2 + \sum_{p \in \sigma^{-1}(0)} \delta_p(\tilde{f})$$

(7)
$$\mu_0(f) - 1 = (\operatorname{ord}_0 f)(\operatorname{ord}_0 f - 1) + \sum_{p \in \sigma^{-1}(0) \cap \{\tilde{f}=0\}} (\mu_p(\tilde{f}) - 1)$$

Klasyczne twierdzenie Noethera to formuły (5) na krotność przecięcia ([B], Theorem 13) oraz (6) na ilość punktów podwójnych $\delta_0(f)$. Wzór (7) wynika z formuły $2\delta_0(f) = \mu_0(f) + r_0(f) - 1$.

3 Lokalne modyfikacje toryczne

Celem tego artykułu jest wyprowadzenie formuł które uogólniają te z twierdzenia 2 na przypadek dowolnej lokalnej modyfikacji torycznej $\pi : M \to C^2$. W przypadku kiedy π jest rozdmuchaniem sprowadzą się one do (5)–(7) a dla modyfikacji torycznej o dostatecznie drobnym wachlarzu dadzą wzory (1)–(3) z twierdzenia 1.

3.1 Wachlarze

Stożek prosty $S \subset R^2$ jest to zbiór

$$S = \{\, \alpha\vec{\xi} + \beta\vec{\nu} : \alpha \geq 0, \beta \geq 0 \,\}$$

gdzie wektory $\vec{\xi}$, $\vec{\nu} \in R^2$ rozpinające S są całkowitoliczbowe i tworzą bazę kraty całkowitoliczbowej, to znaczy $\det(\vec{\xi}, \vec{\nu}) = \pm 1$. W dalszym ciągu wektorami rozpinającymi stożek prosty będziemy nazywać taką właśnie parę wektorów.

Skończony zbiór stożków prostych których suma mnogościowa daje pierwszą ćwiartkę R^2_+ i które przecinają się co najwyżej wzdłuż krawędzi będziemy nazywać wachlarzem.

Dla każdego wachlarza $\mathcal{W}$ złożonego z n stożków można ponumerować wektory $\vec{\xi_0}$, $\vec{\xi_1}$, $\ldots \vec{\xi_n}$ rozpinające jego stożki przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Wówczas $\vec{\xi_0} = [1, 0]$, $\vec{\xi_n} = [0, 1]$ oraz $\det(\vec{\xi}_{i-1}, \vec{\xi_i}) = 1$ dla $1 < i < n$. Będziemy mówili, że $\mathcal{W}$ jest rozpinany przez ten ciąg wektorów.

3.2 Lokalne modyfikacje toryczne

Ze stożkiem prostym S rozpiętym przez wektory $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$, $\vec{\nu} = (\nu_1, \nu_2)$ kojarzymy odwzorowanie $\varphi_S : C^2 \to C^2$ określone we współrzędnych wzorami

$$\varphi_S : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & u^{\xi_1} v^{\nu_1} \\ y & = & u^{\xi_2} v^{\nu_2} \end{array} \right.$$

Dzięki temu że wyznacznik $\det(\vec{\xi}, \vec{\nu}) = \pm 1$ odwzorowanie odwrotne φ_S^{-1} istnieje i jest odwzorowaniem jednomianowym. Na przykład gdy $\det(\vec{\xi}, \vec{\nu}) = 1$ to

$$\varphi_S^{-1} : \left\{ \begin{array}{rcl} u & = & x^{\nu_2} y^{-\nu_1} \\ v & = & x^{-\xi_2} y^{\xi_1} \end{array} \right.$$

Dlatego φ_S jest algebraicznym izomorfizmem $(C \setminus \{0\})^2$ na $(C \setminus \{0\})^2$

Niech $\mathcal{W}$ będzie wachlarzem złożonym z n stożków

Twierdzenie 3 *Istnieje gładka rozmaitość algebraiczna M wraz z właściwym odwzorowaniem analitycznym $\pi : M \to C^2$ taka, że:*

(i) *π jest izomorfizmem $M \setminus \pi^{-1}(0)$ na $C^2 \setminus \{0\}$,*

(ii) *rozmaitość M jest pokryta n mapami związanymi ze stożkami S_i $(i = 1 \ldots n)$ i w i-tej mapie odwzorowanie π wyraża się wzorem $\pi = \varphi_{S_i}$.*

Odwzorowanie $\pi : M \to C^2$ nazywamy lokalną modyfikacją toryczną skojarzoną z wachlarzem $\mathcal{W}$.

3.3 Pogrubione diagramy Newtona

Jeśli Δ jest diagramem Newtona oraz $\vec{\xi} \in R_+^2$ to określamy funkcję podpierającą $l(\Delta, \vec{\xi})$ wzorem

$$l(\Delta, \vec{\xi}) = \inf_{p \in \Delta} \langle p, \vec{\xi} \rangle$$

Dla wachlarza $\mathcal{W}$ rozpiętego na wektorach $\vec{\xi_0}$, $\vec{\xi_1}$, $\ldots \vec{\xi_n}$ oraz diagramu Newtona Δ definiujemy $\tilde{\Delta}$ jako przecięcie półpłaszczyzn

$$\tilde{\Delta} = \bigcap_{i=0}^{n} \{ \, p \in R_+^2 : \langle p, \vec{\xi_i} \rangle \geq l(\Delta, \vec{\xi_i}) \, \}$$

i nazywamy $\tilde{\Delta}$ pogrubieniem diagramu Δ. Wprost z definicji wynika, że $l(\tilde{\Delta}, \vec{\xi_i}) = l(\Delta, \vec{\xi_i})$ dla $i = 0, \ldots, n$.

4 Uogólnienie twierdzenia Kusznirenki

Twierdzenie 4 *Niech $\pi : M \to C^2$ będzie lokalną modyfikacją toryczną skojarzoną z wachlarzem $\mathcal{W}$. Jeśli f, $g \in C\{x, y\}$ są szeregami dogodnymi oraz $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ ich przeciwobrazami właściwymi to*

$$(f, g)_0 = [\tilde{\Delta}_f, \tilde{\Delta}_g] + \sum_{p \in \pi^{-1}(0)} (\tilde{f}, \tilde{g})_p \tag{8}$$

$$\delta_0(f) = \delta(\tilde{\Delta}_f) + \sum_{p \in \pi^{-1}(0)} \delta_p(\tilde{f}) \tag{9}$$

$$\mu_0(f) = \mu(\tilde{\Delta}_f) + r(\tilde{\Delta}_f) + \sum_{p \in \pi^{-1}(0) \cap \{\tilde{f}=0\}} (\mu_p(\tilde{f}) - 1) \tag{10}$$

Aby uniknąć rozpatrywania w twierdzeniu szczególnych przypadków przyjmujemy zwykłe konwencje dotyczące dodawania $+\infty$.

Przykład 1. Najprostszym wachlarzem $\mathcal{W}$ jest taki którego jedynym stożkiem S jest pierwsza ćwiartka układu współrzędnych. Stożek S i jednocześnie cały wachlarz są rozpięte na wektorach $\vec{\xi_0} = (1, 0)$, $\vec{\xi_1} = (0, 1)$. Odwzorowanie φ_S jest zadane wzorem $(x, y) = (u, v)$ a więc lokalna modyfikacja toryczna skojarzona z $\mathcal{W}$ jest identycznością $C^2 \to C^2$.

Jeśli Δ jest diagramem Newtona szeregu dogodnego to $\tilde{\Delta} = R^2_+$, zatem niezmienniki diagramu pogrubionego są równe odpowiednio: $\mu(\tilde{\Delta}) = 1$, $r(\tilde{\Delta}) = 0$, $\delta(\tilde{\Delta}) = 0$, $[\tilde{\Delta}, \tilde{\Delta}] = 0$ i twierdzenie 4 jest trywialnie spełnione.

Przykład 2. Następny w kolejności wachlarz $\mathcal{W}$ jest zbudowany z dwóch stożków. Łatwo sprawdzić, że warunek aby były to stożki proste pociąga za sobą to, że $\mathcal{W}$ jest rozpięty na $\vec{\xi_0} = (1, 0)$, $\vec{\xi_1} = (1, 1)$ i $\vec{\xi_2} = (0, 1)$. Dla stożka S_1 rozpiętego na wektorach $\vec{\xi_0} = (1, 0)$, $\vec{\xi_1} = (1, 1)$ odwzorowanie φ_{S_1} jest określone wzorem $(x, y) = (uv, v)$. Z kolei odwzorowanie φ_{S_2} skojarzone z drugim ze stożków wachlarza jest zadane przez $(x, y) = (u, uv)$. Tak więc modyfikacja toryczna $\pi : M \to C^2$ skojarzona z wachlarzem $\mathcal{W}$ jest to rozdmuchanie C^2 w zerze.

Jeśli Δ jest diagramem Newtona szeregu dogodnego f o rzędzie $\operatorname{ord}_0 f = d$ to $\tilde{\Delta}$ ma łamaną Newtona będącą odcinkiem o końcach $(d, 0)$ i $(0, d)$. W takim razie: $P(\tilde{\Delta}) = d^2/2$, $\mu(\tilde{\Delta}) = (d-1)^2$, $r(\tilde{\Delta}) = d$, $\delta(\tilde{\Delta}) = d(d-1)/2$. Jeśli f, g są szeregami dogodnymi to pole Minkowskiego ich pogrubionych diagramów Newtona $[\tilde{\Delta}_f, \tilde{\Delta}_g] = (\operatorname{ord}_0 f)(\operatorname{ord}_0 g)$. Podstawiając te wielkości do wzorów (8)–(10) z twierdzenia 4 widzimy, że sprowadzają się one do (5)–(7) z twierdzenia 2.

Sprawdziliśmy, że twierdzenie 2 jest szczególnym przypadkiem twierdzenia 4.

Podobnie jest z twierdzeniem 1. Jeśli f, g są szeregami niezdegenerowanymi, to istnieje taki wachlarz $\mathcal{W}$, że wśród wektorów które go rozpinają są wektory prostopadłe do wszystkich odcinków łamanych Newtona $\mathcal{N}_f$ i $\mathcal{N}_g$. Wówczas diagramy pogrubione $\tilde{\Delta}_f$, $\tilde{\Delta}_g$, są identyczne odpowiednio z Δ_f, Δ_g i nierówności w twierdzeniu 1 wynikają z uwzględnienia poprawek po prawej stronie wzorów z twierdzenia 4.

Jeśli f i g spełniają warunki niedegeneracji to ich przeciwobrazy właściwe zadają krzywe gładkie nie mające wspólnych punktów na dywizorze wyjątkowym $\pi^{-1}(0)$ (zob. [Ch]) i sumy po prawej stronie wzorów (8) i (9) są zerowe a suma po prawej stronie wzoru (10) wynosi $-r_0(f) = -r(\Delta_f)$. Tak więc również twierdzenie 1 jest szczególnym przypadkiem twierdzenia 4.

4.1 Rozkład modyfikacji torycznej na złożenie rozdmuchań

Sprawdzimy w tym podrozdziale, że każda lokalna modyfikacja toryczna jest złożeniem skończonej ilości rozdmuchań. W ten sposób przygotujemy grunt do indukcyjnego dowodu formuł z twierdzenia 4.

Rozpoczniemy od lematów opisujących wzajemne położenie wektorów rozpinających wachlarz.

Lemat 5 *Jeśli wachlarz $\mathcal{W}$ jest rozpięty na wektorach $\vec{\xi_0}, \vec{\xi_1}, \ldots, \vec{\xi_n}$ oraz wektory $\vec{\xi_k}, \vec{\xi_l}$ $(k+1 < l)$ tworzą bazę kraty całkowitoliczbowej to jeden z wektorów $\vec{\xi_i}$ jest postaci $\vec{\xi_k} + \vec{\xi_l}$.*

Dowód. Przypuśćmy, że tak nie jest. Wtedy $\vec{\xi_k} + \vec{\xi_l}$ leży wewnątrz pewnego stożka S_j wachlarza $\mathcal{W}$ gdzie $k < j \leq l$ i przynajmniej jeden z wektorów rozpinających S_j nie jest równy ani $\vec{\xi_k}$ ani $\vec{\xi_l}$. Bez utraty ogólności możemy założyć, że jest to $\vec{\xi_j}$. Mamy więc następujące równania o współczynnikach całkowitych:

$$\begin{array}{rcl} \vec{\xi}_{j-1} & = & n_1\vec{\xi_k} + n_2\vec{\xi_l} \\ \vec{\xi_j} & = & m_1\vec{\xi_k} + m_2\vec{\xi_l} \\ \vec{\xi_k} + \vec{\xi_l} & = & a\vec{\xi}_{j-1} + b\vec{\xi_j} \end{array}$$

ze współczynnikami $n_1 \geq 0$, $n_2 \geq 0$, $n_1 + n_2 \geq 1$, $m_1 > 0$, $m_2 > 0$, $a > 0$, $b > 0$. Podstawiając prawe strony dwóch pierwszych równań do trzeciego stwierdzamy, że $an_1 + bn_1 = 1$ oraz $am_2 + bm_2 = 1$ skąd wynika, że $n_1 = n_2 = 0$ – sprzeczność.

Wniosek 6 *Jeśli wachlarz $\mathcal{W}_n$ jest rozpięty na wektorach $\vec{\xi_0}, \vec{\xi_1}, \ldots, \vec{\xi_n}$ to dla pewnego i $(1 < i < n)$ jest*

$$\vec{\xi_i} = \vec{\xi}_{i-1} + \vec{\xi}_{i+1}.$$

Dowód wniosku polega na użyciu prostego argumentu indukcyjnego. Wektory $\vec{\xi_0}$ i $\vec{\xi_n}$ spełniają założenia lematu 5. Zatem wśród wektorów $\vec{\xi_i}$ jeden jest postaci $\vec{\xi_0} + \vec{\xi_n}$. Następnie stosujemy lemat 5 do pary $\vec{\xi_0}, \vec{\xi_i}$ lub do pary $\vec{\xi_i}, \vec{\xi_n}$. Kontynuując to postępowanie dochodzimy do takiej trójki kolejnych wektorów $\vec{\xi}_{i-1}, \vec{\xi_i}, \vec{\xi}_{i+1}$, że $\vec{\xi_i} = \vec{\xi}_{i-1} + \vec{\xi}_{i+1}$.

Co więcej, jest jasne że wektory $\vec{\xi_0}, \ldots, \vec{\xi}_{i-1}, \vec{\xi}_{i+1}, \ldots, \vec{\xi_n}$ również rozpinają pewien wachlarz $\mathcal{W}_{n-1}$ o liczbie stożków o 1 mniejszej od liczby stożków $\mathcal{W}_n$. Wachlarz $\mathcal{W}_n$ nazywamy rozdrobnieniem $\mathcal{W}_{n-1}$ – powstaje on bowiem poprzez podział jednego ze stożków wachlarza $\mathcal{W}_{n-1}$ na dwa.

W kolejnym twierdzeniu porównamy lokalne modyfikacje toryczne skojarzone z wachlarzem i jego rozdrobnieniem.

Twierdzenie 7 *Niech $\mathcal{W}_n$, $\mathcal{W}_{n+1}$ będą wachlarzami rozpiętymi odpowiednio na wektorach $\vec{\xi}_0, \ldots, \vec{\xi}_{i-1}, \vec{\xi}_i, \ldots, \vec{\xi}_n$ oraz $\vec{\xi}_0, \ldots, \vec{\xi}_{i-1}, \vec{\xi}_{i-1}+\vec{\xi}_i, \vec{\xi}_i, \ldots, \vec{\xi}_n$ oraz niech $\pi_n : M_n \to C^2$, $\pi_{n+1} : M_{n+1} \to C^2$ będą modyfikacjami torycznymi skojarzonymi odpowiednio z $\mathcal{W}_n$ i $\mathcal{W}_{n+1}$. Wtedy $\pi_{n+1} = \pi_n \circ \sigma$ gdzie σ jest rozdmuchaniem M_n w początku lokalnego układu współrzędnych mapy φ_{S_i}.*

Dowód. Niech $\tilde{S}$, S', S'' będą stożkami rozpiętymi odpowiednio przez pary wektorów $(\vec{\xi}_{i-1}, \vec{\xi}_i)$, $(\vec{\xi}_{i-1}, \vec{\xi}_{i-1} + \vec{\xi}_i)$, $(\vec{\xi}_{i-1} + \vec{\xi}_i, \vec{\xi}_i)$. We wszystkich mapach odpowiadających stożkom S wachlarzy $\mathcal{W}_n$ i $\mathcal{W}_{n+1}$ różnym od $\tilde{S}$, S', S'' odwzorowania π_n oraz π_{n+1} wyrażają się identycznymi wzorami a więc w tych mapach odwzorowanie σ można zadać jako identyczność. Jeśli rozpatrzymy $\varphi_{S'}$, $\varphi_{S''}$ i $\varphi_{\tilde{S}}$ to łatwo sprawdzić, że $\varphi_{S'} = \varphi_{\tilde{S}} \circ \sigma$ gdzie $\sigma(u,v) = (uv, v)$ oraz, że $\varphi_{S''} = \varphi_{\tilde{S}} \circ \sigma$ gdzie $\sigma(u,v) = (u, uv)$. Tak więc σ jest rozdmuchaniem M_n w punkcie $(0,0)$ mapy skojarzonej ze stożkiem $\tilde{S}$.

4.2 Rzędy przeciwobrazów właściwych w punktach kolejnych rozdmuchań

Lemat 8 *Jeśli $f = f(x,y)$ jest szeregiem dogodnym o diagramie Newtona Δ, $\pi : M \to C^2$ jest lokalną modyfikacją toryczną o wachlarzu $\mathcal{W}$ oraz S jest jednym ze stożków $\mathcal{W}$ rozpiętym na wektorach $\vec{\xi}$, $\vec{\nu}$ to rząd przeciwobrazu właściwego f w punkcie $(0,0)$ mapy φ_S wynosi*

$$l(\Delta, \vec{\xi} + \vec{\nu}) - l(\Delta, \vec{\xi}) - l(\Delta, \vec{\nu}).$$

Dowód. Dla

$$f(x,y) = \sum_{ij} a_{ij} x^i y^j$$

jest

$$(f \circ \varphi_S)(u,v) = \sum_{ij} a_{ij} u^{\langle (i,j), \vec{\xi} \rangle} v^{\langle (i,j), \vec{\nu} \rangle}$$

Z sumy w powyższym wzorze możemy wyłączyć czynniki $u^{l(\Delta, \vec{\xi})}$ oraz $v^{l(\Delta, \vec{\nu})}$ a więc

$$f(x,y) = u^{l(\Delta,\vec{\xi})} v^{l(\Delta,\vec{\nu})} \tilde{f}(u,v) \tag{11}$$

gdzie $\tilde{f}(u,v)$ jest przeciwobrazem właściwym szeregu f.

Rząd $\mathrm{ord}_0 \tilde{f}$ jest równy rzędowi $\mathrm{ord}_0 \tilde{f} \circ \gamma$ podstawienia generycznej krzywej $\gamma : t \to (u,v) = (c_1 t, c_2 t)$. We współrzędnych (x,y) krzywa γ ma postać $(x,y) = (d_1 t^{\xi_1+\nu_1}, d_2 t^{\xi_2+\nu_2})$ i dla generycznych d_1, d_2 jest $\mathrm{ord}_0 f(d_1 t^{\xi_1+\nu_1}, d_2 t^{\xi_2+\nu_2}) = l(\Delta, \vec{\xi} + \vec{\nu})$ zob. [Ch]. Zatem po podstawieniu parametryzacji krzywej γ do (11) dostajemy

$$l(\Delta, \vec{\xi} + \vec{\nu}) = \mathrm{ord}_0 (t^{l(\Delta,\vec{\xi})} t^{l(\Delta,\vec{\nu})} (\tilde{f} \circ \gamma)(t)) = l(\Delta, \vec{\xi}) + l(\Delta, \vec{\nu}) + \mathrm{ord}_0 \tilde{f}.$$

4.3 Dowód twierdzenia 4

Dowód formuły (9). Niech $\mathcal{W}_n$, $\mathcal{W}_{n+1}$ będą wachlarzami z twierdzenia 7. Niech f, g będą takimi szeregami dogodnymi, że $\tilde{\Delta}_f = \tilde{\Delta}_g = \tilde{\Delta}$ gdzie operacja pogrubienia jest względem wachlarza $\mathcal{W}_{n+1}$. Zachowując notację z twierdzenia 7 sprawdzimy, że ze wzoru

$$\delta_0(f) - \sum_{p\in\pi_n^{-1}(0)} \delta_p(\tilde{f}_n) \quad = \quad \delta_0(g) - \sum_{p\in\pi_n^{-1}(0)} \delta_p(\tilde{g}_n) \tag{12}$$

wynika

$$\delta_0(f) - \sum_{p\in\pi_{n+1}^{-1}(0)} \delta_p(\tilde{f}_{n+1}) \quad = \quad \delta_0(g) - \sum_{p\in\pi_{n+1}^{-1}(0)} \delta_p(\tilde{g}_{n+1}) \tag{13}$$

Używamy dolnych indeksów dla $\tilde{f}_n$, $\tilde{g}_n$, $\tilde{f}_{n+1}$, $\tilde{g}_{n+1}$ aby odróżnić przeciwobrazy właściwe na rozmaitościach M_n oraz M_{n+1}. Dzięki twierdzeniu 7 wiemy, że $\pi_{n+1} = \pi_n \circ \sigma$ gdzie σ jest rozdmuchaniem M_n w punkcie q będącym początkiem lokalnego układu współrzędnych mapy φ_{S_i}. Z lematu 8 wynika, że rzędy $\tilde{f}_n$, $\tilde{g}_n$ w punkcie q są równe i wynoszą

$$l(\tilde{\Delta}, \vec{\xi}_{i-1} + \vec{\xi}_i) - l(\tilde{\Delta}, \vec{\xi}_{i-1}) - l(\tilde{\Delta}, \vec{\xi}_i).$$

W takim razie ze wzoru (6) na liczbę punktów podwójnych mamy

$$\delta_q(\tilde{f}_n) - \sum_{p\in\sigma^{-1}(q)} \delta_p(\tilde{f}_{n+1}) \quad = \quad \delta_q(\tilde{g}_n) - \sum_{p\in\sigma^{-1}(q)} \delta_p(\tilde{g}_{n+1}) \tag{14}$$

Dodając stronami (12) i (14) dostajemy (13).

Zastosowanie indukcji ze względu na ilość stożków wachlarza prowadzi do wniosku, że formuła (12) jest prawdziwa dla dowolnego wachlarza $\mathcal{W}$ i dowolnych szeregów dogodnych f, g dla których $\tilde{\Delta}_f = \tilde{\Delta}_g = \tilde{\Delta}$. Biorąc jako g szereg o diagramie $\Delta_g = \tilde{\Delta}$ spełniający dodatkowo warunek niedegeneracji i korzystając z twierdzenia 1 stwierdzamy, że $\delta_0(g) = \delta(\tilde{\Delta})$ oraz, że $\delta_p(\tilde{g}_n) = 0$ dla każdego punktu p dywizora wyjątkowego $\pi_n^{-1}(0)$. Tak więc prawa strona (12) jest równa $\delta(\tilde{\Delta})$ co dowodzi twierdzenia.

Dowód formuły (10). Wystarczy użyć formuły $\delta_p(f) = (\mu_p(f) + r_p(f) - 1)/2$. Po podstawieniu do (9) i pomnożeniu przez 2 dostajemy równość

$$\mu_0(f) + r_0(f) - 1 = \mu(\tilde{\Delta}) + r(\tilde{\Delta}) - 1 + \sum_{p\in\pi^{-1}(0)\cap\{\tilde{f}=0\}} (\mu_p(\tilde{f}) + r_p(\tilde{f}) - 1)$$

Następnie korzystamy z równości liczby gałęzi

$$r_0(f) = \sum_{p\in\pi^{-1}(0)} r_p(\tilde{f})$$

i dostajemy (10).

Dowód formuły (8). Ten dowód przebiega analogicznie do dowodu (9).

Dlatego jedynie go naszkicujemy.

Najpierw dowodzimy przy pomocy indukcji ze względu na ilość stożków wachlarza wzór

$$(f_1, g_1)_0 - \sum_{p\in\pi^{-1}(0)} (\tilde{f}_1, \tilde{g}_1)_p \quad = \quad (f_2, g_2)_0 - \sum_{p\in\pi^{-1}(0)} (\tilde{f}_2, \tilde{g}_2)_p \tag{15}$$

gdzie f_i, g_i $(i = 1, 2)$ są takimi szeregami dogodnymi, że $\tilde{\Delta}_{f_1} = \tilde{\Delta}_{f_2}$ oraz $\tilde{\Delta}_{g_1} = \tilde{\Delta}_{g_2}$. W dowodzie indukcyjnym korzystamy z formuły (5) na krotność przecięcia po rozdmuchaniu.

Następnie jako f_2 i g_2 bierzemy szeregi niezdegenerowane o diagramach $\Delta_{f_2} = \tilde{\Delta}_{f_2}$ i $\Delta_{g_2} = \tilde{\Delta}_{g_2}$. Wówczas z twierdzenia 1 wynika, że prawa strona (15) jest równa $[\tilde{\Delta}_{f_2}, \tilde{\Delta}_{g_2}]$ co dowodzi (8).

Literatura

[Ch] **A. G. Chowański**, *Wielokąty Newtona i rozmaitości toryczne*, (po rosyjsku) Funkcjonalnyj analiz i jego priłożenija **11.4** (1977) 56–64

[K] **A. G. Kouchnirenko**, *Polyèdres de Newton et nombres de Milnor*, Invent. Math. **32.1** (1975), 1–32

[B] **E. Brieskorn, H. Knörrer**, Plane algebraic curves, Birkhäuser Verlag 1986

KOUCHNIRENKO TYPE FORMULAE FOR LOCAL INVARIANTS OF ANALYTIC CURVES

Summary. Let $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$ be plane analytic curves. We introduce formulae for the Milnor number $\mu_0(f)$ and the intersection multiplicity $(f, g)_0$. The obtained formulae generalize classical Noether formula for the intersection multiplicity and Kouchnirenko theorem.

Łódź, 9 – 13 stycznia 2006 r.