MATERIAŁY XXV KONFERENCJI SZKOLENIOWEJ Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ ZESPOLONEJ

2004 **Łódź** **str. 9**

KRYTERIUM μ-CONSTANT

Janusz Gwoździewicz (Kielce)

1 Wstęp

Niech $\{C_t\}_{t\in U}$ będzie rodziną kiełków krzywych analitycznych określonych w pobliżu punktu $p \in \mathbb{C}^2$. Jeśli dla krzywych C_s, C_t istnieje otoczenie W punktu p oraz homeomorfizm $\Phi : W \to W$ dla którego $\Phi(W \cap C_s) = W \cap C_t$ to mówimy, że C_s i C_t są topologicznie równoważne.

Wiadomo, że kiełki krzywych topologicznie równoważnych mają jednakowe liczby Milnora. Jest więc $\mu_p(C_s) = \mu_p(C_t)$. Celem artykułu jest podanie dowodu stwierdzenia w pewnym sensie odwrotnego: *Jeżeli rodzina $\{C_t\}_{t\in U}$ zależy analitycznie od parametru $t \in U \subset \mathbb{C}$, zbiór U jest otwarty i spójny, oraz $\mu_p(C_t) = \mathrm{const}$ dla $t \in U$ to krzywe rodziny $\{C_t\}_{t\in U}$ są topologicznie równoważne.*

Warunek tego typu nazywamy kryterium μ-constant ekwisingularności.
W [LR] można znaleźć omówienie tego kryterium oraz jego dowód dla analitycznych rodzin hiperpowierzchni.

Mój dowód korzysta z przedstawionego przeze mnie w ubiegłorocznych materiałach konferencyjnych kryterium Puiseux i naśladuje dowód kryterium wyróżnikowego Zariskiego z [Z] (zobacz też dodatek D w [BR]).

2 Kryterium ekwisingularności

Łatwo zauważyć, że wystarczy sprawdzić kryterium μ-constant dla rodziny krzywych $\{C_t\}_{t\in U}$ przechodzących przez $(0,0) \in \mathbb{C}^2$ oraz udowodnić je lokalnie, tak więc można założyć, że U jest dowolnie małym spójnym otoczeniem punktu $0 \in \mathbb{C}$.

W otoczeniu $(0,0)$ krzywe takiej rodziny są dane przez

$$C_t = \{ (x,y) \in \mathbb{C}^2 : f_t(x,y) = 0 \}$$

gdzie $f_t(x,y) \in \mathbb{C}\{t,x,y\}$ jest kiełkiem funkcji analitycznej takim, że $f_t(0,0) = 0$ oraz $f_t(x,y)$ jest bez czynników wielokrotnych w $\mathbb{C}\{x,y\}$ dla $|t| \ll 1$.

Twierdzenie 1 *Niech* $\{C_t\}_{t\in(\mathbb{C},0)}$ *będzie rodziną kiełków krzywych*

$$C_t = \{ (x,y) \in (\mathbb{C}^2,0) : f_t(x,y) = 0 \}$$

gdzie $f_t(x,y) \in \mathbb{C}\{t,x,y\}$ *jest kiełkiem funkcji analitycznej takim, że* $f_t(0,0) = 0$ *oraz* $f_t(x,y)$ *jest bez czynników wielokrotnych w* $\mathbb{C}\{x,y\}$ *dla* $|t| \ll 1$*. Jeśli* $\mu(C_t) = \mathrm{const}$ *dla* $|t| \ll 1$ *to dla dowolnych* s*,* t *dostatecznie bliskich* $0 \in C$ *kiełki* C_s *i* C_t *są topologicznie równoważne.*

Dowód powyższego twierdzenia poprzedzimy dwoma lematami. Najpierw zastąpimy rodzinę funkcji analitycznych $f_t(x,y) \in \mathbb{C}\{t,x,y\}$ topologicznie równoważną rodziną wielomianów $g_t(x,y) \in \mathbb{C}\{t\}[x,y]$ a następnie dobierzemy układ współrzędnych tak, aby te wielomiany miały dogodny rozkład w pierścieniu $\mathbb{C}\{x\}^*[y]$.

Lemat 1 *Niech* $f_t(x,y)$ *spełnia założenia twierdzenia 1. Wówczas istnieje rodzina wielomianów* $g_t(x,y) \in \mathbb{C}\{t\}[x,y]$ *postaci*

$$g_t(x,y) = y^n + a_1(t,x)y^{n-1} + \cdots + a_n(t,x)$$

gdzie $\deg(g_t(x,y) - y^n) < n$*, taka, że dla* $|t| \ll 1$ *krzywe* $f_t(x,y) = 0$ *oraz* $g_t(x,y) = 0$ *są topologicznie równoważne w otoczeniu* $(0,0) \in C^2$*.*

Dowód. Rozwińmy funkcję $f_t(x,y)$ względem potęg zmiennych x i y

$$f_t(x,y) = \sum_{i,j\geq 1} a_{ij}(t)x^i y^j$$

Ustalmy $n = 1 + 2\mu(f_t)$ oraz niech

$$g_t(x,y) = y^n + \sum_{i,j<n} a_{ij}(t)x^i y^j$$

Wówczas $f_t(x,y) \equiv g_t(x,y) \mod \mathbf{m}^n$ gdzie $\mathbf{m}$ jest ideałem maksymalnym pierścienia $\mathbb{C}\{x,y\}$. Jest $\mathbf{m}^n \subset \left(\frac{\partial f_t}{\partial x}, \frac{\partial f_t}{\partial y}\right)^2 \mathbf{m}$ bo potęga $\mathbf{m}^{\mu(f_t)}$ ideału maksymalnego zawiera się w ideale $\left(\frac{\partial f_t}{\partial x}, \frac{\partial f_t}{\partial y}\right)$. Zatem z wniosku z twierdzenia Tougerona (zob.

artykuł konferencyjny Macieja Sękalskiego) wynika, że funkcje f_t, g_t są topologicznie równoważne a więc tym bardziej kiełki krzywych $f_t(x, y) = 0$ oraz $g_t(x, y) = 0$.

Uwaga. Ponieważ funkcje topologicznie równoważne mają tę samą liczbę Milnora oraz $\mu(f_t) = \mu(C_t) = \text{const}$ dla $|t| \ll 1$ więc również $\mu(g_t) = \text{const}$ dla $|t| \ll 1$.

Lemat 2 *Niech rodzina wielomianów $g_t(x, y) \in \mathbb{C}\{t\}[x, y]$ będzie jak w wypowiedzi lematu 1. Wówczas istnieje $\lambda \in C$ takie, że dla $|t| \ll 1$ zachodzą warunki:*

(i) $\operatorname{ord}_y g_t(\lambda y, y) = \operatorname{ord} g_t(x, y)$,

(ii) niezerowe pierwiastki wielomianu $g_t(\lambda y, y)$ są pojedyncze.

Dowód. Przedstawmy $g_t(x, y)$ jako sumę wielomianów jednorodnych zmiennych x, y. Jest

$$g_t(x, y) = y^n + g_{n-1,t}(x, y) + \cdots + g_{d,t}(x, y)$$

gdzie $g_{i,t}(x, y)$ są wielomianami stopnia i dla $i = d, \ldots, n-1$ oraz $g_{d,t}(x, y) \neq 0$. Dzieki jednorodności składników tej sumy mamy

$$g_t(\lambda y, y) = y^n + y^{n-1} g_{n-1,t}(\lambda, 1) + \cdots + y^d g_{d,t}(\lambda, 1)$$

Ustalmy $t_0 \in C$ dla którego $g_{d,t_0}(x, y) \neq 0$ i weźmy stałą λ_0 taką, że $g_{d,t_0}(\lambda_0, 1) \neq 0$. Wtedy również dla λ bliskich λ_0 jest $g_{d,t_0}(\lambda, 1) \neq 0$. Weźmy teraz pod uwagę wielomian $\tilde{g}_t(\lambda, y) = g_t(\lambda y, y)/y^d$. Warunkiem dostatecznym aby niezerowe pierwiastki wielomianu $g_t(\lambda y, y)$ były pojedyncze jest nieznikanie wyróżnika $D(t, \lambda) = \operatorname{Disc}_y(\tilde{g}_t(\lambda, y))$. Równość $D(t, \lambda) = 0$ charakteryzuje te λ dla których prosta $x = \lambda y$ przecina nietranswersalnie krzywą $g_t(x, y) = 0$ poza początkiem układu wspólrzędnych. Dla dowolnego t takich prostych jest tylko skończona ilość. W takim razie dla nieskończenie wielu λ jest $g_{d,t_0}(\lambda, 1) \neq 0$ oraz $D(t_0, \lambda) \neq 0$.

Funkcje $g_{d,t}(\lambda, 1)$ i $D(t, \lambda)$ są funkcjami holomorficznymi zmiennej t nie znikającymi tożsamościowo a więc są różne od 0 dla $0 < |t| \ll 1$. Warunek $g_{d,t}(\lambda, 1) \neq 0$ daje (i) a z warunku $D(t, \lambda) \neq 0$ dostajemy (ii). Dzięki dowolności wyboru stałej λ możemy dobrać ją tak aby warunki (i) i (ii) były spełnione również przy $t = 0$.

Dowód twierdzenia. Dzięki lematowi 1 wystarczy udowodnić kryterium μ-constant dla rodziny krzywych wielomianowych $g_t(x, y) = 0$ jak w tezie tego lematu. Z kolei korzystając z lematu 2 i dokonując liniowej zamiany układu współrzędnych przy której prosta $x = \lambda y$ staje się nową osią Oy możemy założyć, że

(i) $\operatorname{ord} g_t(0, y) = \operatorname{ord} g_t(x, y) = d$ dla $0 < |t| \ll 1$,

(ii) $g_t(x, y) = y^n + a_{n-1}(t, x) y^{n-1} + \cdots + a_0(t, x)$,

(iii) $g_t(0, y) = y^d (y - b_{d+1}(t)) \cdots (y - b_n(t))$ gdzie $b_i(t)$ $(i = d + 1, \ldots, n)$ są niezerowe i parami różne dla $0 < |t| \ll 1$,

(iv) wszystkie niezerowe pierwiastki wielomianu $g_0(0, y)$ są pojedyncze.

Z algorytmu Puiseux wynika, że

$$g_t(x, y) = \prod_{i=1}^{n} (y - y_i^{(t)}(x))$$

gdzie $y_i^{(t)}(x)$ są szeregami Puiseux zmiennej x o współczynnikach z ciała będącego algebraicznym domknięciem pierścienia $\mathbb{C}\{t\}$. Można pokazać (zobacz [Z]), że dzięki warunkowi (ii) te współczynniki są całkowite nad pierścieniem $\mathbb{C}\{t\}$ a więc należą do pierścienia szeregów Puiseux $\mathbb{C}\{t\}^*$.

Kładąc $b_i(t) = 0$ dla $1 \leq i \leq d$ możemy na podstawie lematu Hensela przyjąć, że

$$y_i^{(t)}(x) = b_i(t) + \text{wyrazy wyższych rzędów ze względu na } x$$

dla $i = 1, \ldots, n$. Co więcej warunek (i) daje $\operatorname{ord}_x(y_i^{(t)}(x) - b_i(t)) \geq 1$.

Dzięki warunkom (iii) i (iv) zachodzi wariant formuły Teissiera (zob. [BR]).

$$\mu(g_t) = 1 - \#\{\, i : \operatorname{ord} y_i^{(t)}(x) > 0 \,\} + \sum_{i \neq j} \operatorname{ord}\,(y_i^{(t)}(x) - y_j^{(t)}(x))$$

Sumowanie w formule Teissiera rozciąga się wyłącznie na te pierwiastki Puiseux $y_i^{(t)}(x)$ dla których $\operatorname{ord} y_i^{(t)}(x) > 0$ ale (iii) i (iv) dają $\operatorname{ord}\,(y_i^{(t)}(x) - y_j^{(t)}(x)) = 0$ jeśli przynajmniej jeden z szeregów Puiseux $y_i^{(t)}(x)$ lub $y_j^{(t)}(x)$ ma niezerowy wyraz wolny. Tak więc poprawka wniesiona przez dodatkowe składniki sumy jest równa 0.

Z założenia $\mu(g_t) = \text{const}$ dla $|t| \ll 1$ wynika równość

$$\sum_{i \neq j} c_{ij} = \#\{\, i : \operatorname{ord} y_i^{(0)}(x) > 0 \,\} - \#\{\, i : \operatorname{ord} y_i^{(t)}(x) > 0 \,\} \tag{1}$$

w której $c_{ij}(t) = \operatorname{ord}\,(y_i^{(0)}(x) - y_j^{(0)}(x)) - \operatorname{ord}\,(y_i^{(t)}(x) - y_j^{(t)}(x))$.

Ustalmy $i \neq j$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$. Wówczas

$$y_i^{(t)}(x) - y_j^{(t)}(x) = b(t)x^\alpha + \text{ wyrazy wyższych stopni}$$

gdzie $b(t) \in \mathbb{C}\{t\}^*$, $b(t) \not\equiv 0$. Dla dostatecznie małych $|t| \neq 0$ jest $b(t) \neq 0$ a więc $\operatorname{ord}\,(y_i^{(t)}(x) - y_j^{(t)}(x)) = \alpha$, $\operatorname{ord}\,(y_i^{(0)}(x) - y_j^{(0)}(x)) \geq \alpha$. Zatem dla dostatecznie małych $|t| \neq 0$ wszystkie liczby $c_{ij}(t)$ są nieujemnie.

Przypuśćmy, że dokładnie $k \geq 1$ spośród szeregów $y_{d+1}^{(0)}(x), \ldots, y_n^{(0)}(x)$ ma dodatni rząd. Wówczas liczba po prawej stronie równości (1) wynosi k. Z kolei liczba po lewej stronie (1) jest większa lub równa $2k$ bo jeśli $y_j^{(0)}(x)$ jest jednym z takich szeregów to $c_{1j}(t) \geq 1$ i $c_{j1}(t) \geq 1$ a więc każdy taki szereg daje przyczynek co najmniej 2 w sumie po lewej stronie wzoru (1). Uzyskana sprzeczność daje $k = 0$ czyli

$$\sum_{i \neq j} c_{ij} = 0$$

Stwierdziliśmy, że wszystkie liczby $c_{ij}(t)$ są równe 0. Dlatego

$$\operatorname{ord}(y_i^{(0)}(x) - y_j^{(0)}(x)) = \operatorname{ord}(y_i^{(t)}(x) - y_j^{(t)}(x))$$

dla $1 \leq i < j \leq n$. Zatem na mocy kryterium Puiseux ekwisingularności kiełki krzywych $g_0(x,y) = 0$ i $g_t(x,y) = 0$ są topologicznie równoważne.

Literatura

[BR] **Riccardo Benedetti, Jean–Jacques Risler**, *Real algebraic and semialgebraic sets*, Hermann, Paris 1990.

[LR] **Lê Dũng Tráng, C. P. Ramanujam**, *The invariance of Milnor's number implies the invariance of the topological type*, American Journal of Mathematics, Vol. 98, No. 1, pp. 67–78, 1976.

[Z] **Oscar Zariski**, *Contributions to the problem of equisingularity*, w: Questions on algebraic varieties, C.I.M.E. 1969

μ-CONSTANT CRITERION

Summary. We give a proof of μ-constant criterion of equisingularity for analytic families of plane curve germs.

Łódź, 5 – 9 stycznia 2004 r.