MATERIAŁY XXIV KONFERENCJI SZKOLENIOWEJ Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ ZESPOLONEJ

2003 **Łódź** **str. 9**

KRYTERIUM PUISEUX TOPOLOGICZNEJ RÓWNOWAŻNOŚCI KRZYWYCH

Janusz Gwoździewicz (Kielce)

1 Wstęp

Jednym z ważnych zagadnień teorii krzywych analitycznych jest problem ich topologicznej klasyfikacji. Niech $f(x,y)=0$, $g(x,y)=0$ będą lokalnymi równaniami krzywych analitycznych w otoczeniu początku układu współrzędnych płaszczyzny zespolonej. Krzywą lokalną $f=0$ będziemy nazywali topologicznie równoważną krzywej $g=0$ gdy istnieje taki homeomorfizm otoczeń zera w $\mathbf{C}^2$ który przeprowadza $f=0$ na $g=0$.

Niezmienniki krzywych które są takie same dla krzywych topologicznie równoważnych nazywamy niezmiennikami ekwisingularności. Zariski podał listę niezmienników ekwisingularności (cytujemy ją nieznacznie zmodyfikowaną w warunku (Z) twierdzenia 1) która kompletnie wyznacza typ topologiczny krzywej $xf(x,y)=0$. Oznacza to że dwie krzywe $xf(x,y)=0$, $xg(x,y)=0$ dla których owe niezmienniki są jednakowe są topologicznie równoważne.

W praktycznych rachunkach posługujemy się często rozwinięciami Puiseux pierwiastków równania $f(x,y)=0$. Moim celem jest pokazanie, że listę niezmienników Zariskiego można zastąpić listą zbudowaną z rzędów różnic pierwiastków Puiseux równania $f(x,y)=0$.

2 Kryteria ekwisingularności

Niech $f(x, y) \in \mathbf{C}\{x, y\}$ będzie szeregiem y–dogodnym to znaczy takim, że $f(0, y) = ay^n +$ *wyrazy wyższych rzędów* gdzie $n \geq 1$. Wówczas istnieje rozkład

$$f(x, y) = a(x, y) \prod_{i=1}^{n} (y - y_i(x))$$

w którym $a(x, y)$ jest kiełkiem funkcji analitycznej, $a(0, 0) \neq 0$ natomiast $y_i(x)$ są szeregami Puiseux bez wyrazów wolnych. Taki rozkład będziemy w dalszym tekście nazywać rozkładem Puiseux.

Niech ϕ, $\psi \in \mathbf{C}\{x, y\}$ będą szeregami nierozkładalnymi w pierścieniu $\mathbf{C}\{x, y\}$ oraz niech $\phi(x, y) = a(x, y) \prod_{i=1}^{n} (y - y_i(x))$, $\psi(x, y) = a'(x, y) \prod_{j=1}^{m} (y - \bar{y}_j(x))$ będą ich rozkładami Puiseux. Kładziemy z definicji

$$\mathrm{Char}(\phi) = \{ \mathrm{ord}(y_i(x) - y_j(x)) : 1 \leq i < j \leq n \}$$

$$\mathrm{cont}(\phi, \psi) = \max\{ \mathrm{ord}(y_i(x) - \bar{y}_j(x)) : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \}$$

Zbiór $\mathrm{Char}(\phi)$ składa się ze skończonej liczby dodatnich ułamków. Sprowadzając je do wspólnego mianownika możemy napisać, że $\mathrm{Char}(\phi) = \left\{ \frac{b_1}{b_0}, \frac{b_2}{b_0}, \ldots, \frac{b_h}{b_0} \right\}$ gdzie b_0, $b_1 < b_2 < \ldots < b_h$ są liczbami naturalnymi bez wspólnego dzielnika. Tradycyjnie przez charakterystykę szeregu ϕ rozumiemy ciąg $b_0, b_1, \ldots, b_h$. Stąd oznaczenie naszego zbioru. Liczbę $\mathrm{cont}(\phi, \psi)$ nazywamy kontaktem gałęzi ϕ i ψ.

Będziemy dalej korzystać z własności która mówi, że dla dowolnych szeregów nierozkładalnych α_1, α_2, $\alpha_3 \in \mathbf{C}\{x, y\}$ dwie z liczb: $\mathrm{cont}(\alpha_1, \alpha_2)$, $\mathrm{cont}(\alpha_2, \alpha_3)$, $\mathrm{cont}(\alpha_3, \alpha_1)$ są sobie równe i mniejsze lub równe trzeciej. Jej dowód wynika z własności rzędów różnic szeregów Puiseux. Można go znaleźć w [B].

Twierdzenie 1 *Niech f, $g \in \mathbf{C}\{x, y\}$ będą szereregami y-dogodnymi bez czynników wielokrotnych. Następujące warunki są równoważne:*

(Z) *Istnieją rozkłady $f = f_1 \cdots f_r$, $g = g_1 \cdots g_r$ na czynniki nierozkładalne w pierścieniu $\mathbf{C}\{x, y\}$ takie, że*

- **(a)** $\mathrm{Char}(f_i) = \mathrm{Char}(g_i)$ *dla* $i = 1 \ldots r$,
- **(b)** $\mathrm{cont}(f_i, f_j) = \mathrm{cont}(g_i, g_j)$ *dla* $1 \leq i < j \leq r$,

(P) *Istnieją rozkłady Puiseux $f = a \prod_{i=1}^{n} (y - y_i(x))$, $g = a' \prod_{i=1}^{n} (y - \bar{y}_i(x))$ takie, że $\mathrm{ord}(y_i(x) - y_j(x)) = \mathrm{ord}(\bar{y}_i(x) - \bar{y}_j(x))$ dla $1 \leq i < j \leq n$.*

3 Obcinanie szeregów

Niech $y(x) = \sum c_i x^{\alpha_i}$ będzie szeregiem Puiseux a $f \in \mathbf{C}\{x, y\}$ wielomianem wyróżnionym o rozkładzie $f = \prod_{i=1}^{n} (y - y_i(x))$ w pierścieniu $\mathbf{C}\{x\}^*[y]$. Określamy obcięcia szeregów $y(x)$, $f(x,y)$ do rzędu $\beta > 0$ wzorami

$$y^{(\beta)}(x) = \sum_{\alpha_i < \beta} c_i x^{\alpha_i}$$

$$f^{(\beta)} = \prod_{i=1}^{n} (y - y_i^{(\beta)}(x))$$

Można sprawdzić, że dla dowolnego $\beta > 0$ jest $f^{(\beta)} \in \mathbf{C}\{x,y\}$.

Lemat 1 *Niech f_1, $f_2 \in \mathbf{C}\{x,y\}$ będą nierozkładalnymi wielomianami wyróżnionymi oraz niech* $\mathrm{Char}(f_1) = \left\{\frac{b_1}{b_0}, \frac{b_2}{b_0}, \ldots, \frac{b_h}{b_0}\right\}$. *Niech $\beta \geq \frac{b_h}{b_0}$. Wtedy*

(i) *jeśli $\beta = \frac{b_h}{b_0}$ to $f_1^{(\beta)} = \phi^a$ gdzie ϕ jest nierozkładalnym wielomianem wyróżnionym o charakterystyce* $\mathrm{Char}(\phi) = \left\{\frac{b_1}{b_0}, \frac{b_2}{b_0}, \ldots, \frac{b_{h-1}}{b_0}\right\}$ *oraz $a = NWD(b_0, \ldots, b_{h-1})$,*

(ii) *jeśli $\beta > \frac{b_h}{b_0}$ to $f_1^{(\beta)}$ jest nierozkładalym wielomianem wyróżnionym o charakterystyce* $\mathrm{Char}(f_1^{(\beta)}) = \mathrm{Char}(f_1)$,

(iii) *jeśli $f_1^{(\beta)} = \phi^{a_1}$, $f_2^{(\beta)} = \phi^{a_2}$ to* $\mathrm{cont}(f_1, f_2) \geq \beta$,

(iv) *jeśli* $\mathrm{cont}(f_1, f_2) < \beta$ *oraz $f_1^{(\beta)} = \phi_1^{a_1}$, $f_2^{(\beta)} = \phi_2^{a_2}$ to* $\mathrm{cont}(\phi_1, \phi_2) = \mathrm{cont}(f_1, f_2)$,

Własności (i) i (ii) są udowodnione w [G–P] przy okazji konstruowania tak zwanych pseudopierwiastków aproksymatywnych. Własność (iii) jest bezpośrednią konsekwencją definicji obcięcia. Natomiast (iv) wynika ze wspomnianej wcześniej własności funkcji kontaktu. Istotnie niech $\alpha = \mathrm{cont}(f_1, f_2)$. Ponieważ $\mathrm{cont}(f_1, \phi_1) \geq \beta$, $\mathrm{cont}(f_2, \phi_2) \geq \beta$ więc $\mathrm{cont}(f_1, \phi_2) = \alpha$ a więc również $\mathrm{cont}(\phi_1, \phi_2) = \alpha$.

Lemat 2 *Niech f, g będą wielomianami wyróżnionymi bez czynników wielokrotnych spełniającymi warunek (P). Niech* $\beta = \max\{\,\mathrm{ord}(y_i(x) - y_j(x)) : y_i(x) \neq y_j(x)$ *są pierwiastkami Puiseux f* $\}$ *i załóżmy, że $f^{(\beta)} = \phi_1^{a_1} \cdots \phi_r^{a_r}$, $g^{(\beta)} = \psi_1^{a_1} \cdots \psi_r^{a_r}$ gdzie wielomiany wyróżnione ϕ_i, ϕ_j oraz ψ_i, ψ_j są nierozkładalne i parami względnie pierwsze.*

Jeśli dla $\Phi = \phi_1 \cdots \phi_r$, $\Psi = \psi_1 \cdots \psi_r$ zachodzi (Z) to dla f, g również zachodzi (Z).

Dowód: Ze względu na wybór β obcięcie każdego czynnika nierozkładalnego wielomianów f oraz g do poziomu β jest potęgą pewnego nierozkładalnego wielomianu wyróżnionego. Mówią o tym punkty (i) i (ii) lematu 1. W takim razie istnieją faktoryzacje $f = \Phi_1 \cdots \Phi_r$, $g = \Psi_1 \cdots \Psi_r$ na iloczyn wielomianów wyróżnionych niekoniecznie nierozkładalnych dla których $\Phi_i^{(\beta)} = \phi_i^{a_i}$ oraz $\Psi_i^{(\beta)} = \psi_i^{a_i}$ dla $i = 1 \ldots r$.

Jeśli s, w są czynnikami nierozkładalnymi odpowiednio Φ_i, Φ_j gdzie $i \neq j$ to $\mathrm{cont}(s, w) = \mathrm{cont}(\phi_i, \phi_j) < \beta$. Jeśli $s \neq w$ są czynnikami nierozkładalnymi tego samego wielomianu Φ_i to znowu z uwagi na wybór poziomu obcięcia lemat 1.(iii) daje $\mathrm{cont}(s, w) = \beta$.

Obliczymy teraz charakterystyki czynników nierozkładalnych ustalonego Φ_i. Skupmy uwagę na Φ_1 i załóżmy, że $\Phi_1 = f_1 \cdots f_k$ gdzie wszystkie wielomiany wyróżnione f_i $(1 \leq i \leq k)$ są nierozkładalne.

Niech $\mathrm{Char}(\phi_1) = \left\{ \frac{b_1}{b_0}, \frac{b_2}{b_0}, \dots, \frac{b_h}{b_0} \right\}$. Rozpatrzmy dwa przypadki:

— Jeśli β jest ułamkiem postaci $\frac{b}{b_0}$ to z punktu (ii) lematu 1 dostajemy $\Phi_1 = f_1 \cdots f_k, \quad k = a_1$ oraz $\mathrm{Char}(f_i) = \mathrm{Char}(\phi_1)$ dla $i = 1 \dots k$.

— Jeśli β jest ułamkiem postaci $\frac{b}{b_0 a}$ gdzie $NWD(a, b) = 1$ to wśród szeregów $f_1, \dots, f_k$ istnieje szereg o charakterystyce

$$\left\{ \frac{b_1 a}{b_0 a}, \frac{b_2 a}{b_0 a}, \dots, \frac{b_h a}{b_0 a}, \frac{b}{b_0 a} \right\} \tag{1}$$

Ponieważ $\mathrm{cont}(f_i, f_j) = \beta$ dla $1 \leq i < j \leq k$ więc co najwyżej jeden z szeregów f_i ma charakterystykę $\mathrm{Char}(\phi_1)$. Zatem:

albo wszystkie szeregi f_i mają charakterystykę (1) i wtedy $a_1 = ak$,

albo dokładnie jeden spośród szeregów f_i ma charakterystykę $\mathrm{Char}(\phi_1)$, pozostałe mają charakterystykę (1) i wtedy $a_1 = 1 + a(k-1)$.

Widzimy, że znajomość liczb a_1, β oraz charakterystyki $\mathrm{Char}(\phi_1)$ pozwala obliczyć liczbę oraz charakterystyki poszczególnych wielomianów z rozkładu $\Phi_1 = f_1 \cdots f_k$.

W dowodzie pokazaliśmy efektywny sposób wyznaczania wielkości (kontaktów i charakterystyk) występujących w warunku (Z). Zatem f, g spełniają ten warunek.

Dowód twierdzenia: Udowodnimy trudniejszą implikację (P)$\Rightarrow$(Z) Załóżmy bez zmniejszania ogólności, że f, g są wielomianami wyróżnionymi bez czynników wielokrotnych. Niech $f = \prod_{i=1}^{n}(y - y_i(x))$, $g = \prod_{i=1}^{n}(y - \bar{y}_i(x))$ spełniają warunek (P). Zastosujemy indukcję ze względu na liczbę $\beta = \max\{\, \mathrm{ord}(y_i(x) - y_j(x)) : i \neq j \,\}$.

Wielomiany $f^{(\beta)} = \prod_{i=1}^{n}(y - y_i^{(\beta)}(x))$ i $g^{(\beta)} = \prod_{i=1}^{n}(y - \bar{y}_i^{(\beta)}(x))$ również spełniają warunek (P) przy czym jeśli $\mathrm{ord}(y_i - y_j) < \beta$ to $\mathrm{ord}(y_i^{(\beta)} - y_j^{(\beta)}) = \mathrm{ord}(y_i - y_j)$ a gdy $\mathrm{ord}(y_i - y_j) = \beta$ to $y_i^{(\beta)} = y_j^{(\beta)}$. Pomijając w rozkładach $f^{(\beta)}$, $g^{(\beta)}$ czynniki wielokrotne dochodzimy do zredukowanych wielomianów wyróżnionych Φ, Ψ spełniających warunek (P). Z założenia indukcyjnego wynika, że dla Φ i Ψ zachodzi (Z). Stosując lemat 2 stwierdzamy, że f, g spełniają warunek (Z).

Literatura

[G–P] J. Gwoździewicz, A. Płoski, *On the aproximate roots of polynomials*, Annales Polonici Mathematici **LX.3** (1995) 199–210

[B] Evelia R. Garcia Barroso, teza doktorska

PUISEUX EQUISINGULARITY CRITERION FOR ANALYTIC CURVES

Summary. Let $f = f(x, y)$ be an analytic function in two complex variables defined in the neighborhood of the origin. Let $y_1(x),\ldots, y_n(x)$ be the Puiseux roots of the equation $f(x, y) = 0$. We prove that the orders of differences $y_i(x) - y_j(x)$ determine the topology of the germ $xf(x, y) = 0$.

Łódź, 6 – 10 stycznia 2003 r.