Snopy w teorii kategorii

K. Grzelakowski

Katedra Geometrii Algebraicznej i Informatyki Teoretycznej
University of Łódź

Geometria Analityczna i Algebraiczna,
Styczeń 2018

Plan referatu

Plan referatu

Presnopy i snopy

Definicja

Niech X będzie przestrzenią topologiczną. *Presnopem grup abelowych na X* nazywamy przyporządkowanie $\mathscr{F}$, które

Presnopy i snopy

Definicja

Niech X będzie przestrzenią topologiczną. *Presnopem grup abelowych na* X nazywamy przyporządkowanie $\mathscr{F}$, które

1. każdemu podzbiorowi otwartemu $U \subset X$ przypisuje grupę abelową $\mathscr{F}(U)$,

Presnopy i snopy

Definicja

Niech X będzie przestrzenią topologiczną. *Presnopem grup abelowych na* X nazywamy przyporządkowanie $\mathscr{F}$, które

1. każdemu podzbiorowi otwartemu $U \subset X$ przypisuje grupę abelową $\mathscr{F}(U)$,
2. każdej parze podzbiorów otwartych $V \subset U \subset X$ przypisuje homomorfizm grup abelowych $\rho_{V,U} : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$ (zwany *obcięciem*),

Presnopy i snopy

Definicja

Niech X będzie przestrzenią topologiczną. *Presnopem grup abelowych na* X nazywamy przyporządkowanie $\mathscr{F}$, które

1. każdemu podzbiorowi otwartemu $U \subset X$ przypisuje grupę abelową $\mathscr{F}(U)$,
2. każdej parze podzbiorów otwartych $V \subset U \subset X$ przypisuje homomorfizm grup abelowych $\rho_{V,U} : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$ (zwany *obcięciem*),

takie, że

Presnopy i snopy

Definicja

Niech X będzie przestrzenią topologiczną. *Presnopem grup abelowych na* X nazywamy przyporządkowanie $\mathscr{F}$, które

1. każdemu podzbiorowi otwartemu $U \subset X$ przypisuje grupę abelową $\mathscr{F}(U)$,
2. każdej parze podzbiorów otwartych $V \subset U \subset X$ przypisuje homomorfizm grup abelowych $\rho_{V,U} : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$ (zwany *obcięciem*),

takie, że

1. $\mathscr{F}(\varnothing)$ jest grupą trywialną,

Presnopy i snopy

Definicja

Niech X będzie przestrzenią topologiczną. *Presnopem grup abelowych na* X nazywamy przyporządkowanie $\mathscr{F}$, które

1. każdemu podzbiorowi otwartemu $U \subset X$ przypisuje grupę abelową $\mathscr{F}(U)$,
2. każdej parze podzbiorów otwartych $V \subset U \subset X$ przypisuje homomorfizm grup abelowych $\rho_{V,U} : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$ (zwany *obcięciem*),

takie, że

1. $\mathscr{F}(\varnothing)$ jest grupą trywialną,
2. $\rho_{U,U}$ jest identycznością na $\mathscr{F}(U)$,

Presnopy i snopy

Definicja

Niech X będzie przestrzenią topologiczną. *Presnopem grup abelowych na* X nazywamy przyporządkowanie $\mathscr{F}$, które

1. każdemu podzbiorowi otwartemu $U \subset X$ przypisuje grupę abelową $\mathscr{F}(U)$,
2. każdej parze podzbiorów otwartych $V \subset U \subset X$ przypisuje homomorfizm grup abelowych $\rho_{V,U} : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$ (zwany *obcięciem*),

takie, że

1. $\mathscr{F}(\varnothing)$ jest grupą trywialną,
2. $\rho_{U,U}$ jest identycznością na $\mathscr{F}(U)$,
3. jeśli $W \subset V \subset U$ są zbiorami otwartymi w X to $\rho_{W,U} = \rho_{W,V} \circ \rho_{V,U}$.

Definicja

Presnop $\mathscr{F}$ na przestrzeni topologicznej X nazywamy *snopem*, jeśli spełnia następujące warunki:

Definicja

Presnop $\mathscr{F}$ na przestrzeni topologicznej X nazywamy *snopem*, jeśli spełnia następujące warunki:

1. *lokalność:* jeśli $\{U_i \to U\}$ jest pokryciem zbioru otwartego U i jeśli $s \in \mathscr{F}(U)$ jest takie, że $\rho_{U_i,U}(s) = 0$ dla każdego i, to $s = 0$,

Definicja

Presnop $\mathscr{F}$ na przestrzeni topologicznej X nazywamy *snopem*, jeśli spełnia następujące warunki:

1. *lokalność:* jeśli $\{U_i \to U\}$ jest pokryciem zbioru otwartego U i jeśli $s \in \mathscr{F}(U)$ jest takie, że $\rho_{U_i,U}(s) = 0$ dla każdego i, to $s = 0$,
2. *sklejanie:* jeśli $\{U_i \to U\}$ jest pokryciem zbioru otwartego U i jeśli dla każdych i, j mamy takie elementy $s_i \in \mathscr{F}(U_i), s_j \in \mathscr{F}(U_j)$, że $\rho_{U_i \cap U_j, U_i}(s_i) = \rho_{U_i \cap U_j, U_j}(s_j)$ to istnieje element $s \in \mathscr{F}(U)$, że $\rho_{U_i,U}(s) = s_i$ dla każdego i.

Definicja

Presnop $\mathscr{F}$ na przestrzeni topologicznej X nazywamy *snopem*, jeśli spełnia następujące warunki:

1. *lokalność:* jeśli $\{U_i \to U\}$ jest pokryciem zbioru otwartego U i jeśli $s \in \mathscr{F}(U)$ jest takie, że $\rho_{U_i,U}(s) = 0$ dla każdego i, to $s = 0$,
2. *sklejanie:* jeśli $\{U_i \to U\}$ jest pokryciem zbioru otwartego U i jeśli dla każdych i, j mamy takie elementy $s_i \in \mathscr{F}(U_i), s_j \in \mathscr{F}(U_j)$, że $\rho_{U_i \cap U_j, U_i}(s_i) = \rho_{U_i \cap U_j, U_j}(s_j)$ to istnieje element $s \in \mathscr{F}(U)$, że $\rho_{U_i,U}(s) = s_i$ dla każdego i.

Definicja

Presnop $\mathscr{F}$ nazywamy *rozdzielczym* jeśli spełnia warunek lokalności w definicji snopa.

Przykład

Niech $X = \mathbb{R}$ *z topologią naturalną. Niech* $\mathscr{F}$ *będzie presnopem ciągłych funkcji ograniczonych o wartościach rzeczywistych, tj. niech każdemu zbiorowi otwartemu* $U \subset \mathbb{R}$ *przypisuje pierścień funkcji ciągłych ograniczonych określonych na* U *o wartościach w* $\mathbb{R}$*. Wówczas* $\mathscr{F}$ *jest presnopem rozdzielczym.*

Przykład

Niech $X = \mathbb{R}$ *z topologią naturalną. Niech* $\mathscr{F}$ *będzie presnopem ciągłych funkcji ograniczonych o wartościach rzeczywistych, tj. niech każdemu zbiorowi otwartemu* $U \subset \mathbb{R}$ *przypisuje pierścień funkcji ciągłych ograniczonych określonych na* U *o wartościach w* $\mathbb{R}$*. Wówczas* $\mathscr{F}$ *jest presnopem rozdzielczym.*

Przykład

Niech $X = \mathbb{R}$ *z topologią naturalną. Niech* $\mathscr{F}$ *będzie presnopem funkcji ciągłych o wartościach w* $\mathbb{R}$*. Jest to snop.*

Przykład

Niech $X = \mathbb{R}$ *z topologią naturalną. Niech* $\mathscr{F}$ *będzie presnopem ciągłych funkcji ograniczonych o wartościach rzeczywistych, tj. niech każdemu zbiorowi otwartemu* $U \subset \mathbb{R}$ *przypisuje pierścień funkcji ciągłych ograniczonych określonych na* U *o wartościach w* $\mathbb{R}$*. Wówczas* $\mathscr{F}$ *jest presnopem rozdzielczym.*

Przykład

Niech $X = \mathbb{R}$ *z topologią naturalną. Niech* $\mathscr{F}$ *będzie presnopem funkcji ciągłych o wartościach w* $\mathbb{R}$*. Jest to snop.*

Przykład

Niech $X = \mathbb{C}$ *z topologią naturalną. Niech* $\mathscr{O}$ *będzie presnopem funkcji holomorficznych. Jest to snop.*

Plan referatu

Definicja

Topologią Grothendiecka na kategorii $\mathscr{C}$ nazywamy przyporządkowanie każdemu obiektowi U z $\mathscr{C}$ rodziny zbiorów morfizmów $\{U_i \to U\}_{i \in I}$, której elementy nazywamy *pokryciami* U, spełniające następujące warunki:

Definicja

Topologią Grothendiecka na kategorii $\mathscr{C}$ nazywamy przyporządkowanie każdemu obiektowi U z $\mathscr{C}$ rodziny zbiorów morfizmów $\{U_i \to U\}_{i \in I}$, której elementy nazywamy *pokryciami* U, spełniające następujące warunki:

1. jeśli $U' \to U$ jest izomorfizmem to $\{U' \to U\}$ jest pokryciem U,

Definicja

Topologią Grothendiecka na kategorii $\mathscr{C}$ nazywamy przyporządkowanie każdemu obiektowi U z $\mathscr{C}$ rodziny zbiorów morfizmów $\{U_i \to U\}_{i \in I}$, której elementy nazywamy *pokryciami* U, spełniające następujące warunki:

1. jeśli $U' \to U$ jest izomorfizmem to $\{U' \to U\}$ jest pokryciem U,
2. jeśli $\{U_i \to U\}$ jest pokryciem U i dla każdego i $\{V_{ij} \to U_i\}_j$ jest pokryciem U_i to $\{V_{ij} \to U_i \to U\}_{i,j}$ jest pokryciem U,

Definicja

Topologią Grothendiecka na kategorii $\mathscr{C}$ nazywamy przyporządkowanie każdemu obiektowi U z $\mathscr{C}$ rodziny zbiorów morfizmów $\{U_i \to U\}_{i \in I}$, której elementy nazywamy *pokryciami* U, spełniające następujące warunki:

1. jeśli $U' \to U$ jest izomorfizmem to $\{U' \to U\}$ jest pokryciem U,
2. jeśli $\{U_i \to U\}$ jest pokryciem U i dla każdego i $\{V_{ij} \to U_i\}_j$ jest pokryciem U_i to $\{V_{ij} \to U_i \to U\}_{i,j}$ jest pokryciem U,
3. jeśli $\{U_i \to U\}$ i $V \to U$ jest morfizmem to wszystkie produkty włókniste $U_i \times_U V$ istnieją i $\{U_i \times_U V \to V\}_i$ jest pokryciem V.

Definicja

Topologią Grothendiecka na kategorii $\mathscr{C}$ nazywamy przyporządkowanie każdemu obiektowi U z $\mathscr{C}$ rodziny zbiorów morfizmów $\{U_i \to U\}_{i \in I}$, której elementy nazywamy *pokryciami* U, spełniające następujące warunki:

1. jeśli $U' \to U$ jest izomorfizmem to $\{U' \to U\}$ jest pokryciem U,
2. jeśli $\{U_i \to U\}$ jest pokryciem U i dla każdego i $\{V_{ij} \to U_i\}_j$ jest pokryciem U_i to $\{V_{ij} \to U_i \to U\}_{i,j}$ jest pokryciem U,
3. jeśli $\{U_i \to U\}$ i $V \to U$ jest morfizmem to wszystkie produkty włókniste $U_i \times_U V$ istnieją i $\{U_i \times_U V \to V\}_i$ jest pokryciem V.

Kategorię wyposażona w topologię Grothendiecka nazywamy *polem* (ang. site) i oznaczamy tak samo jak kategorię.

Przykład

Przestrzeń topologiczna X traktowana jako kategoria $\mathscr{C}$, której obiektami są zbiory otwarte, pokryciami zwykłe pokrycia zbiorami otwartymi a morfizmami zanurzenia zbiorów jest polem.

Przykład

Przestrzeń topologiczna X traktowana jako kategoria $\mathscr{C}$, której obiektami są zbiory otwarte, pokryciami zwykłe pokrycia zbiorami otwartymi a morfizmami zanurzenia zbiorów jest polem.

Przykład

Niech $\mathscr{C} = \mathrm{Top}$ i niech pokryciami $X \in \mathrm{Top}^o$ będą zbiory ciągłych odwzorowań $f_i : X_i \to X$, $i \in I$, między przestrzeniami topologicznymi takie, że ich obrazy wspólnie pokrywają całą przestrzeń X. Wtedy $\mathscr{C}$ jest polem.

Definicja

Funktor $\mathscr{F} : \mathscr{C}^{opp} \mapsto \mathit{Set}$, czyli dowolny funktor kontrawarianty działający z $\mathscr{C}$ w Set nazywamy *presnopem zbiorów* (ang. presheaf of sets). Kategorię $\mathrm{Fun}(\mathscr{C}^{opp}, \mathit{Set})$ nazywamy *kategorią presnopów na* $\mathscr{C}$ i oznaczamy $\mathrm{PSh}(\mathscr{C})$.

Definicja

Funktor $\mathscr{F} : \mathscr{C}^{opp} \mapsto Set$, czyli dowolny funktor kontrawarianty działający z $\mathscr{C}$ w Set nazywamy *presnopem zbiorów* (ang. presheaf of sets). Kategorię $\mathrm{Fun}(\mathscr{C}^{opp}, Set)$ nazywamy *kategorią presnopów na* $\mathscr{C}$ i oznaczamy $\mathrm{PSh}(\mathscr{C})$.

Definicja

Presnop $\mathscr{F} : \mathscr{C}^{opp} \mapsto Set$ nazywamy *snopem* jeśli dla każdego obiektu $U \in \mathscr{C}$ i każdego pokrycia $\{U_i \to U\}$ w następującym diagramie:

$$\mathscr{F}(U) \to \prod_i \mathscr{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathscr{F}(U_i \times_U U_j)$$

$\mathscr{F}(U)$ wraz z odpowiednimi morfizmami jest ekwilizatorem.

Plan referatu

Definicja

Snopem *stowarzyszonym* z presnopem $\mathscr{F}$ nazywamy każdy snop $\mathscr{F}^\#$ wraz z morfizmem $\phi : \mathscr{F} \to \mathscr{F}^\#$ posiadający następującą własność. Dla każdego snopa $\mathscr{G}$ i morfizmu $\theta : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ istnieje dokładnie jeden morfizm $\psi : \mathscr{F}^\# \to \mathscr{G}$ taki, że $\theta = \psi \circ \phi$.

Propozycja

Niech $\mathscr{F}$ będzie presnopem na przestrzeni topologicznej X. Dla dowolnego otwartego zbioru $U \subset X$ określamy

Propozycja

Niech $\mathscr{F}$ *będzie presnopem na przestrzeni topologicznej* X. *Dla dowolnego otwartego zbioru* $U \subset X$ *określamy*

$$\mathscr{F}^{\#}(U) :=$$

$$\{s : U \to \bigcup_{P \in U} \mathscr{F}_P | \underset{P\in U}{\forall} \left(s(P) \in \mathscr{F}_P \wedge \underset{P\in V\subset U}{\underset{V}{\exists}} \ \underset{t\in\mathscr{F}(V)}{\exists} \ \underset{Q\in V}{\forall} t_Q = s(Q)\right)\},$$

gdzie $\mathscr{F}_P$ *jest źdźbłem (włóknem) presnopa w punkcie* P.

Propozycja

Niech $\mathscr{F}$ *będzie presnopem na przestrzeni topologicznej* X*. Dla dowolnego otwartego zbioru* $U \subset X$ *określamy*
$\mathscr{F}^{\#}(U) :=$

$$\{s : U \to \bigcup_{P \in U} \mathscr{F}_P | \underset{P\in U}{\forall} \big(s(P) \in \mathscr{F}_P \wedge \underset{\substack{V \\ P\in V\subset U}}{\exists} \ \underset{t\in\mathscr{F}(V)}{\exists} \ \underset{Q\in V}{\forall} \ t_Q = s(Q)\big)\},$$

gdzie $\mathscr{F}_P$ *jest źdźbłem (włóknem) presnopa w punkcie* P*.Homomorfizmy* $\rho^{\#}_{V,U}$ *dla* $V \subset U$ *definiujemy w sposób naturalny jako obcięcia funkcji* $s \in \mathscr{F}^{\#}(U)$ *do zbioru* V*. Wówczas* $\mathscr{F}^{\#}$ *jest snopem stowarzyszonym z* $\mathscr{F}$*.*

Niech $\mathscr{C}$ będzie polem i niech $\mathscr{F} : \mathscr{C}^{opp} \mapsto \mathrm{Set}$ będzie presnopem. Niech $\mathscr{U} = \{U_i \to U\}_{i \in I}$ będzie pokryciem dowolnego obiektu $U \in \mathscr{C}^o$. Określmy teraz

$$\mathscr{F}(\mathscr{U}) = \{(s_i)_{i \in I} \in \prod_i \mathscr{F}(U_i) | \underset{i,j \in I}{\forall} \rho_{U_i \times_U U_j, U_i}(s_i) = \rho_{U_i \times_U U_j, U_j}(s_j)\}.$$

Niech $\mathscr{C}$ będzie polem i niech $\mathscr{F} : \mathscr{C}^{opp} \mapsto \mathrm{Set}$ będzie presnopem. Niech $\mathscr{U} = \{U_i \to U\}_{i \in I}$ będzie pokryciem dowolnego obiektu $U \in \mathscr{C}^o$. Określmy teraz

$$\mathscr{F}(\mathscr{U}) = \{(s_i)_{i \in I} \in \prod_i \mathscr{F}(U_i) | \underset{i,j \in I}{\forall} \rho_{U_i \times_U U_j, U_i}(s_i) = \rho_{U_i \times_U U_j, U_j}(s_j)\}.$$

Niech $\mathscr{J}_U$ będzie kategorią, której obiektami są pokrycia obiektu U, a morfizmami zanurzenia pokryć wpisanych, to jest niech $\mathscr{V} \to \mathscr{U} \in \mathrm{Hom}(\mathscr{V}, \mathscr{U})$ oznacza pewną rodzinę morfizmów $\{V_j \to U_{i(j)}\}_j$ wpisujących $\mathscr{V}$ w $\mathscr{U}$. Niech

$$\mathscr{F}^+(U) = \mathrm{colim}_{\mathscr{U}} \mathscr{F}(\mathscr{U}).$$

Niech $\mathscr{C}$ będzie polem i niech $\mathscr{F} : \mathscr{C}^{opp} \mapsto \mathrm{Set}$ będzie presnopem. Niech $\mathscr{U} = \{U_i \to U\}_{i \in I}$ będzie pokryciem dowolnego obiektu $U \in \mathscr{C}^o$. Określmy teraz

$$\mathscr{F}(\mathscr{U}) = \{(s_i)_{i \in I} \in \prod_i \mathscr{F}(U_i) | \underset{i,j \in I}{\forall} \rho_{U_i \times_U U_j, U_i}(s_i) = \rho_{U_i \times_U U_j, U_j}(s_j)\}.$$

Niech $\mathscr{J}_U$ będzie kategorią, której obiektami są pokrycia obiektu U, a morfizmami zanurzenia pokryć wpisanych, to jest niech $\mathscr{V} \to \mathscr{U} \in \mathrm{Hom}(\mathscr{V}, \mathscr{U})$ oznacza pewną rodzinę morfizmów $\{V_j \to U_{i(j)}\}_j$ wpisujących $\mathscr{V}$ w $\mathscr{U}$. Niech

$$\mathscr{F}^+(U) = \mathrm{colim}_{\mathscr{U}} \mathscr{F}(\mathscr{U}).$$

Propozycja

$\mathscr{F}^+$ jest snopem rozdzielczym.

Niech $\mathscr{C}$ będzie polem i niech $\mathscr{F} : \mathscr{C}^{opp} \mapsto \mathrm{Set}$ będzie presnopem. Niech $\mathscr{U} = \{U_i \to U\}_{i \in I}$ będzie pokryciem dowolnego obiektu $U \in \mathscr{C}^o$. Określmy teraz

$$\mathscr{F}(\mathscr{U}) = \{(s_i)_{i \in I} \in \prod_i \mathscr{F}(U_i) | \underset{i,j \in I}{\forall} \rho_{U_i \times_U U_j, U_i}(s_i) = \rho_{U_i \times_U U_j, U_j}(s_j)\}.$$

Niech $\mathscr{J}_U$ będzie kategorią, której obiektami są pokrycia obiektu U, a morfizmami zanurzenia pokryć wpisanych, to jest niech $\mathscr{V} \to \mathscr{U} \in \mathrm{Hom}(\mathscr{V}, \mathscr{U})$ oznacza pewną rodzinę morfizmów $\{V_j \to U_{i(j)}\}_j$ wpisujących $\mathscr{V}$ w $\mathscr{U}$. Niech

$$\mathscr{F}^+(U) = \mathrm{colim}_{\mathscr{U}} \mathscr{F}(\mathscr{U}).$$

Propozycja

$\mathscr{F}^+$ jest snopem rozdzielczym.

Propozycja

$\mathscr{F}^{++}$ jest snopem stowarzyszonym z $\mathscr{F}$.

Przykład

Niech $X = \{P, Q, R, S\}$ *będzie przestrzenią topologiczną, z topologią:* $\mathcal{T} :=$
$\{\{P, Q, R, S\}, \{P, Q, R\}, \{Q, R, S\}, \{Q, R\}, \{Q\}, \{R\}, \{\varnothing\}\}$.
Zdefiniujmy $\mathscr{F}$*:*

$$\mathscr{F}(\{P, Q, R, S)\} = \mathscr{F}(\{P, Q, R\}) = \mathscr{F}(\{Q, R, S\}) = \mathscr{F}(\{Q, R\}) = \mathbb{Z},$$
$$\mathscr{F}(\{Q\}) = \mathscr{F}(\{R\}) = \mathbb{Z}/2,$$

gdzie wszystkie obcięcia są albo identycznościami albo naturalnymi homomorfizmami. Nie jest to presnop rozdzielczy.

Przykład

Po jednokrotnym przyłożenia funktora $(-)^+$ otrzymujemy:

$$\mathscr{F}^+(\{P,Q,R,S)\} = \mathscr{F}^+(\{P,Q,R\}) = \mathscr{F}^+(\{Q,R,S\}) = \mathbb{Z},$$
$$\mathscr{F}^+(\{Q,R\}) = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2,$$
$$\mathscr{F}^+(\{Q\}) = \mathscr{F}^+(\{R\}) = \mathbb{Z}/2,$$

gdzie obcięcia $\rho_{\{P,Q,R\},\{P,Q,R,S\}} = \rho_{\{Q,R,S\},\{P,Q,R,S\}}$ są identycznościami, $\rho_{\{Q,R\},\{P,Q,R\}}$ i $\rho_{\{Q,R\},\{Q,R,S\}}$ są naturalnymi homomorfizmami na obie współrzędne, a obcięcia $\rho_{\{Q\},\{Q,R\}}$ i $\rho_{\{R\},\{Q,R\}}$ rzutowaniami odpowiednio na pierwszą i drugą współrzędną.

Przykład

Po drugim przyłożeniu funktora $(-)^+$ *mamy:*

$$\begin{aligned}
&\mathscr{F}^{++}(\{P,Q,R,S)\} = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z},\\
&\mathscr{F}^{++}(\{P,Q,R\}) = \mathscr{F}^{++}(\{Q,R,S\}) = \mathbb{Z},\\
&\mathscr{F}^{++}(\{Q,R\}) = \mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/2,\\
&\mathscr{F}^{++}(\{Q\}) = \mathscr{F}^{++}(\{R\}) = \mathbb{Z}/2.
\end{aligned}$$

gdzie $\rho_{\{P,Q,R\},\{P,Q,R,S\}}$ *i* $\rho_{\{Q,R,S\},\{P,Q,R,S\}}$ *są rzutowaniami odpowiednio na pierwszą i drugą współrzędną, a pozostałe obcięcia są zdefiniowane podobnie jak w przypadku* $\mathscr{F}^+$*. Jest to snop.*

Twierdzenie

Niech $\mathscr{F}$ będzie presnopem grup abelowych na przestrzeni topologicznej X. Wówczas $\mathscr{F}^{\#}$ i $\mathscr{F}^{++}$ są izomorficzne

- A. Atanasov *Algebraic stacks*, 2011, http://www.math.harvard.edu/ nasko/documents/stacks.pdf
- The Stacks Project Authors *Stacks Project*, http://math.columbia.edu
- A.Białynicki-Birula *Wykłady z geometrii algebraicznej*, IM PAN, Warszawa, 2013
- S. Brochard *Topologies de Grothendieck, descente, quotients*, arXiv:1210.0431v1 [math.AG] 1 Oct 2012
- R. Hartshorne *Algebraic Geometry*, Springer, New York, 1997
- Z. Semadeni, A.Wiweger *Wstęp do teorii kategorii i funktorów*, PWN, Warszawa, 1972.
- B.R. Tennison *Sheaf Theory*, Cambridge University Press, New York, 1975