**MATERIAŁY NA XXIX KONFERENCJĘ SZKOLENIOWĄ
Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ
ZESPOLONEJ**

2008 **Łódź** **str. 15**

ROZKŁADY UROJONE WIELOMIANÓW DLA SKOŃCZONYCH ROZSZERZEŃ GALOIS

Adam Grygiel (Łódź)

Streszczenie

Niech $\mathbb{K}$ będzie ciałem charakterystyki zero, $\mathbb{L} = \mathbb{K}[\xi]$ rozszerzeniem ciała $\mathbb{K}$ stopnia $m > 1$ oraz $f \in \mathbb{L}[Z]$ wielomianem niezerowym. Istnieją jedyne wielomiany $u_0, \ldots, u_{m-1} \in \mathbb{K}[X_0, \ldots, X_{m-1}]$ takie, że

$$f(X_0 + \xi X_1 + \cdots \xi^{m-1} X_{m-1}) = u_0 + \xi u_1 + \cdots \xi^{m-1} u_{m-1}.$$

W [2] A. Nowicki i S. Spodzieja udowodnili, że wielomiany $u_0, \ldots, u_{m-1}$ nie mają wspólnych czynników dodatniego stopnia w $\mathbb{K}[X_0, \ldots, X_{m-1}]$. W pracy dowodzimy to twierdzenie, przy założeniu, że $\mathbb{L}$ jest skończonym rozszerzeniem Galois ciała $\mathbb{K}$ dowolnej charakterystyki.

1 Wstęp

Niech $\mathbb{K}$ będzie ciałem. Przez $\mathbb{K}[X_0, \ldots, X_n]$ oznaczamy pierścień wielomianów zmiennych $X_0, \ldots, X_n$ o współczynnikach w ciele $\mathbb{K}$.

Niech ciało $\mathbb{L} = \mathbb{K}[\xi]$ będzie rozszerzeniem ciała $\mathbb{K}$ stopnia $m > 1$. Niech $Z_1, \ldots, Z_n$, $n \geqslant 1$ będą zmiennymi i niech $\mathbf{X}_j = (X_{j,0}, \ldots, X_{j,m-1})$ będą układami zmiennych, $j = 1, \dots, n$. Jeśli $n = 1$, to piszemy krótko $\mathbf{X} = (X_0, \dots, X_{m-1})$ zamiast $\mathbf{X}_1 = (X_{1,0}, \dots, X_{1,m-1})$ oraz Z zamiast Z_1.

Oznaczmy

$$[\mathbf{X}_j] = X_{j,0} + \xi X_{j,1} + \cdots + \xi^{m-1} X_{j,m-1}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Jeśli $f \in \mathbb{L}[Z_1, \dots, Z_n]$, to istnieją wielomiany $u_0, \dots, u_{m-1} \in \mathbb{K}[\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n]$ takie, że

$$f([\mathbf{X}_1], \dots, [\mathbf{X}_n]) = u_0 + \xi u_1 + \cdots \xi^{m-1} u_{m-1}, \tag{1}$$

przy czym wielomiany $u_0, \dots, u_{m-1}$ są określone jednoznacznie przez wielomian f. Przedstawienie to nazywamy *rozkładem urojonym wielomianu* f relatywnie do ξ, a wielomiany $u_0, \dots, u_{m-1}$ - *częściami urojonymi* f.

A. Nowicki i S. Spodzieja w pracy [2] wprowadzili następujące uogólnione warunki Cauchy'ego-Riemanna. Mianowicie, niech $u = (u_0, \dots, u_{m-1})$ będzie ciągiem wielomianów $u_0, \dots,\ u_{m-1} \in \mathbb{K}[\mathbf{X}]$ i niech

$$\phi(t) = t^m - a_{m-1} t^{m-1} - \dots - a_1 t - a_0, \quad \text{gdzie } a_0, a_1, \dots, a_{m-1} \in \mathbb{K}$$

będzie wielomianem minimalnym[1] elementu ξ nad $\mathbb{K}$. Oznaczmy przez $\overline{u} = (\overline{u_0}, \dots, \overline{u_{m-1}})$, ciąg wielomianów określony wzorem

$$\overline{u_0} = a_0 u_{m-1}, \quad \overline{u_1} = a_1 u_{m-1} + u_0, \quad \dots, \quad \overline{u_{m-1}} = a_{m-1} u_{m-1} + u_{m-2}.$$

Mówimy, że wielomiany $u_0, \dots, u_{m-1}$ spełniają *uogólnione warunki Cauchy'ego - Riemanna*, gdy

$$\frac{\partial u}{\partial X_i} = \frac{\partial \overline{u}}{\partial X_{i-1}} \qquad \text{dla} \quad i = 1, \dots, m-1. \tag{2}$$

W 2003 A. Nowicki i S. Spodzieja udowodnili następujące

Twierdzenie 1. ([2], Theorem 3.8) *Załóżmy, że $\mathbb{K}$ jest ciałem charakterystyki zero, $\mathbb{L} = \mathbb{K}[\xi]$ rozszerzeniem ciała $\mathbb{K}$ stopnia $m > 1$ i niech $u_0, \dots, u_{m-1} \in \mathbb{K}[\mathbf{X}]$. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

1. *Wielomiany $u_0, \dots, u_{m-1}$ spełniają uogólnione warunki Cauchy'ego - Riemanna.*
2. *Istnieje wielomian $f \in \mathbb{L}[Z]$ taki, że wielomiany $u_0, \dots, u_{m-1}$ są częściami urojonymi f.*

Dla wielomianów $u_0, \dots, u_n \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_{m-1}]$, przez $\gcd(u_0, \dots, u_n)$ oznaczamy *największy wspólny dzielnik* w $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_{m-1}]$ *wielomianów* $u_0, \dots, u_n$. W oparciu o twierdzenie 1. A. Nowicki i S. Spodzieja dowodzą

[1] *Wielomianem minimalnym* elementu ξ algebraicznego względem ciała $\mathbb{K}$ nazywamy unormowany wielomian pierwszy w $\mathbb{K}[X]$, którego pierwiastkiem jest element ξ.

Twierdzenie 2. **([2], Theorem 5.3)** *Załóżmy, że* $\mathbb{K}$ *jest ciałem charakterystyki zero,* $\mathbb{L} = \mathbb{K}[\xi]$ *rozszerzeniem ciała* $\mathbb{K}$ *stopnia* $m > 1$. *Jeśli* $f \in \mathbb{L}[Z_1, \ldots, Z_n]$ *jest wielomianem niezerowym, a wielomiany* $u_0, \ldots, u_{m-1}$ *częściami urojonymi* f, *to*

$$\gcd(u_0, \ldots, u_{m-1}) = 1.$$

W dowodzie twierdzenia 2. istotną rolę odegrało założenie, że ciało $\mathbb{K}$ ma charakterystykę zero. W punkcie 3 pracy przenosimy twierdzenie 2. na ciała dowolnej charakterystyki, jednak przy założeniu, że $\mathbb{L}$ jest skończonym rozszerzeniem Galois[2] ciała $\mathbb{K}$. Głównym wynikiem pracy jest następujące

Twierdzenie 3. *Załóżmy, że* $\mathbb{K}$ *jest ciałem,* $\mathbb{L} = \mathbb{K}[\xi]$ *rozszerzeniem Galois ciała* $\mathbb{K}$ *stopnia* $m > 1$. *Jeśli* $f \in \mathbb{L}[Z_1, \ldots, Z_n]$ *jest wielomianem niezerowym, a* $u_0, \ldots, u_{m-1}$ *częściami urojonymi* f, *to* $\gcd(u_0, \ldots, u_{m-1}) = 1$.

W punkcie 4 pracy dowodzimy twierdzenie 3. w przypadku pierścieni szeregów potęgowych formalnych nad skończonymi rozszerzeniami Galois ciał dowolnej charakterystyki (twierdzenie 5.). Przenosimy również twierdzenie 1. na pierścienie szeregów potęgowych formalnych nad skończonymi rozszerzeniami ciał charakterystyki zero (twierdzenie 6.).

2 Proste fakty

W tym punkcie zbieramy proste fakty stosowane w dowodzie.

Własność 1. *Jeśli wielomiany* $u_0, \ldots, u_{m-1} \in \mathbb{K}[\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n]$ *postaci*

$$u_j = u_j^{(0)} + u_j^{(1)} + \cdots + u_j^{(s)}, \quad j = 0, \ldots, m-1,$$

gdzie każde $u_j^{(r)}$, $r = 0, \ldots, s$ *jest wielomianem jednorodnym stopnia* r *lub wielomianem zerowym, mają wspólny czynnik dodatniego stopnia, to wielomiany* $u_0^{(s)}, \ldots, u_{m-1}^{(s)}$ *również mają wspólny czynnik dodatniego stopnia.*

Dowód. Niech $v \in \mathbb{K}[\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n]$ będzie wspólnym czynnikiem dodatniego stopnia wielomianów u_j, $j = 0, \ldots, m-1$. Wówczas, z własności działań na stopniach, jednorodna składowa $v^{(s)}$ najwyższego stopnia v jest wspólnym czynnikiem wielomianów $u_0^{(s)}, \ldots, u_{m-1}^{(s)}$, co kończy dowód. $\square$

Wprost z definicji wynikają następujące własności wielomianów.

Własność 2. *Niech* $f \in \mathbb{L}[Z_1, \ldots, Z_n]$. *Jeśli wielomiany* $u_0, \ldots, u_{m-1}$ *są częściami urojonymi* f, *to* $\deg u_j \leqslant \deg f$ *dla* $j = 0, \ldots, m-1$.

[2] Niech ciało $\mathbb{L}$ będzie rozszerzeniem ciała $\mathbb{K}$. Automorfizm φ ciała $\mathbb{L}$ nazywamy $\mathbb{K}$-*automorfizmem*, jeżeli jest identycznością na $\mathbb{K}$. Rozszerzenie algebraiczne $\mathbb{L}$ ciała $\mathbb{K}$ nazywamy *rozszerzeniem Galois*, jeżeli istnieje grupa G, $\mathbb{K}$-automorfizmów ciała $\mathbb{L}$ taka, że dla dowolnego $a \in \mathbb{L} \backslash \mathbb{K}$ istnieje $\varphi \in G$ takie, że $\varphi(a) \neq a$.

Własność 3. *Niech $f, g \in \mathbb{L}[Z_1, \ldots, Z_n]$. Jeśli wielomiany $u_0, \ldots, u_{m-1}$ i $v_0, \ldots, v_{m-1}$ są częściami urojonymi odpowiednio wielomianów f i g, to wielomiany $u_0 + v_0, \ldots, u_{m-1} + v_{m-1}$ są częściami urojonymi wielomianu $f + g$.*

Z własności 2., 3. oraz tego, że części urojone jednomianu są wielomianami jednorodnymi tego samego stopnia co jednomian lub wielomianami zerowymi, uzyskujemy

Własność 4. *Jeśli $f \in \mathbb{L}[Z_1, \ldots, Z_n]$ jest wielomianem jednorodnym stopnia s, a wielomiany $u_0, \ldots, u_{m-1}$ częściami urojonymi f, to u_i jest wielomianem jednorodnym stopnia s lub wielomianem zerowym dla $i = 0, \ldots, m-1$.*

Kładąc w (1) $x_{j,1} = \ldots = x_{j,m-1} = 0$ dla $j = 1, \ldots, n$ dostajemy

Własność 5. *Jeśli $f \in \mathbb{L}[Z_1, \ldots, Z_n]$ jest wielomianem niezerowym, to co najmniej jedna z części urojonych f jest wielomianem niezerowym.*

3 Dowód twierdzenia 3.

W tym punkcie zakładamy, że $\mathbb{K}$ jest ciałem, $\mathbb{L} = \mathbb{K}[\xi]$ rozszerzeniem Galois ciała $\mathbb{K}$ stopnia $m > 1$.

W dowodzie twierdzenia 3. zasadniczą rolę odgrywa

Lemat 1. *Jeśli*

$$a_0(X_0 + \xi X_1 + \cdots + \xi^{m-1}X_{m-1})^s = u_0 + \xi u_1 + \cdots + \xi^{m-1}u_{m-1} \tag{3}$$

jest rozkładem urojonym wielomianu $f(Z) = a_0 Z^s$, gdzie $a_0 \in \mathbb{L}\setminus\{0\}$, to

$$\gcd(u_0, \ldots, u_{m-1}) = 1.$$

Dowód. Przypuśćmy, że istnieje wielomian $v \in \mathbb{K}[\mathbf{X}]$ stopnia dodatniego, który jest wspólnym czynnikiem wielomianów $u_0, \ldots, u_{m-1}$ w $\mathbb{K}[\mathbf{X}]$, a więc również w $\mathbb{L}[\mathbf{X}]$. Skoro w pierścieniu z jednoznacznością rozkładu $\mathbb{L}[\mathbf{X}]$, wielomian $X_0 + \xi X_1 + \cdots + \xi^{m-1}X_{m-1}$ jest nierozkładalny, to istnieje $l \in \mathbb{Z}$, $l > 0$ i element $b \in \mathbb{L}\setminus\{0\}$ taki, że

$$b(X_0 + \xi X_1 + \cdots + \xi^{m-1}X_{m-1})^l = v(X_0, \ldots, X_{m-1}). \tag{4}$$

Kładąc $x_0 = -\xi$, $x_1 = 1$ oraz $x_2 = \cdots = x_{m-1} = 0$, z (4) dostajemy

$$v(-\xi, 1, 0, \ldots, 0) = b(-\xi + \xi)^l = 0. \tag{5}$$

Skoro $\xi \in \mathbb{L}\setminus\mathbb{K}$, to istnieje $\mathbb{K}$-automorfizm φ ciała $\mathbb{L}$ taki, że $\varphi(\xi) \neq \xi$. Ponadto, skoro $v \in \mathbb{K}[\mathbf{X}]$, to z (5) otrzymujemy

$$v(-\varphi(\xi), 1, 0, \ldots, 0) = \varphi(v(-\xi, 1, 0, \ldots, 0)) = 0.$$

Stąd i z równości (4) dostajemy $b(-\varphi(\xi) + \xi))^l = 0$, co jest niemożliwe. $\square$

Udowodnimy teraz twierdzenie 3. dla wielomianów jednej zmiennej.

Twierdzenie 4. *Jeśli* $f \in \mathbb{L}[Z]$ *jest wielomianem niezerowym, a wielomiany* $u_0, \ldots, u_{m-1}$ *częściami urojonymi* f*, to* $\gcd(u_0, \ldots, u_{m-1}) = 1$.

Dowód. Niech $f(Z) = a_0 Z^s + \cdots + a_s$, gdzie $a_0, \ldots, a_s \in \mathbb{L}$ oraz $a_0 \neq 0$. Przypuśćmy, że wielomiany $u_0, \ldots, u_{m-1}$ mają wspólny czynnik w $\mathbb{K}[\mathbf{X}]$ dodatniego stopnia. Z własności 2. mamy $\deg u_j \leqslant s$ dla $j = 0, \ldots, m-1$. Przy oznaczeniach własności 1. wielomiany $u_0^{(s)}, \ldots, u_{m-1}^{(s)}$ mają wspólny czynnik dodatniego stopnia oraz z własności 3. i 4. dostajemy

$$a_0(X_0 + \xi X_1 + \cdots + \xi^{m-1} X_{m-1})^s = u_0^{(s)} + \xi u_1^{(s)} + \cdots + \xi^{m-1} u_{m-1}^{(s)}.$$

Z własności 5. mamy $u_i^{(s)} \neq 0$ dla pewnego $i \in \{0, \ldots, m-1\}$. Otrzymana sprzeczność z lematem 1. kończy dowód. $\square$

Niech $d \in \mathbb{Z}$ oraz $d, n \geqslant 2$. Rozważmy podstawienie Kroneckera ([3], 1.6, Definition 5), czyli $\mathbb{L}$-automorfizm $\kappa_d : \mathbb{L}[Z_1, \ldots, Z_n] \to \mathbb{L}[Z_1, \ldots, Z_n]$, postaci

$$\kappa_d(Z_j) = \begin{cases} Z_1, & \text{gdy } j = 1, \\ Z_j + Z_1^{d^{j-1}}, & \text{gdy } j = 2, \ldots, n. \end{cases}$$

W [2] udowodniono następującą

Własność 6. ([2], Proposition 5.1) *Niech* $f \in \mathbb{L}[Z_1, \ldots, Z_n]$ *i niech* $d > \max_{j=1,\ldots,n} \deg_{Z_j} f > 0$*. Wówczas*

$$\kappa_d(f) = a Z_1^N + \ (\textit{wyrazy stopni } < N), \quad N \in \mathbb{Z},\ N > 0,\ a \in \mathbb{L} \backslash \{0\}.$$

Niech $P_j = \kappa_d(Z_j) \in \mathbb{L}[Z_1, \ldots, Z_n]$, $j = 1, \ldots, n$ oraz

$$P_j([\mathbf{X}_1], \ldots, [\mathbf{X}_n]) = v_{j,0} + \xi v_{j,1} + \cdots \xi^{m-1} v_{j,m-1}, \quad v_{j,i} \in \mathbb{K}[\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n].$$

W [2] udowodniono

Własność 7. ([2], Lemma 5.2) *Homomorfizm* $\gamma : \mathbb{K}[\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n] \to \mathbb{K}[\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n]$ *taki, że* $\gamma(X_{j,i}) = v_{j,i}$ *jest* $\mathbb{K}$*-automorfizmem pierścienia* $\mathbb{K}[\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n]$.

Jesteśmy już gotowi do udowodnienia twierdzenia 3.

Dowód twierdzenia 3. Przypuśćmy, że wielomiany $u_0, \ldots, u_{m-1}$ mają wspólny czynnik w $\mathbb{K}[\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n]$ dodatniego stopnia. Przy oznaczeniach własności 1. wielomiany $u_0^{(s)}, \ldots, u_{m-1}^{(s)}$ mają wspólny czynnik dodatniego stopnia. Wobec własności 6. i 7. możemy założyć, że jednorodna składowa $f^{(s)}$ najwyższego stopnia f jest postaci $f^{(s)}(Z_1, \ldots, Z_n) = a Z_1^s$, gdzie $a \in \mathbb{L} \backslash \{0\}$. Zatem $f^{(s)} \in \mathbb{L}[Z_1]$ i w konsekwencji

$$f^{(s)}(X_0 + \xi X_1 + \cdots + \xi^{m-1} X_{m-1}) = u_0^{(s)} + \xi u_1^{(s)} + \cdots + \xi^{m-1} u_{m-1}^{(s)}.$$

Otrzymana sprzeczność z twierdzeniem 4. kończy dowód. $\square$

4 Szeregi potęgowe formalne

Niech $\mathbb{K}$ będzie ciałem. Przez $\mathbb{K}[[X_1, \dots, X_n]]$ oznaczamy pierścień szeregów potęgowych formalnych zmiennych $X_1, \dots, X_n$ o współczynnikach w ciele $\mathbb{K}$.

Z własności 4. dostajemy natychmiast

Własność 8. *Niech $f \in \mathbb{L}[[Z_1, \dots, Z_n]]$ będzie szeregiem potęgowym postaci $f = f^{(d)} + f^{(d+1)} + \cdots$, gdzie $f^{(j)}$ jest wielomianem jednorodnym stopnia j lub wielomianem zerowym dla $j = d, d+1, \dots$. Jeśli*

$$f^{(j)}([\mathbf{X}_1], \dots, [\mathbf{X}_n]) = u_0^{(j)} + \xi u_1^{(j)} + \cdots + \xi^{m-1} u_{m-1}^{(j)}$$

jest rozkładem urojonym wielomianu $f^{(j)}$ dla $j = d, d+1, \dots$, to

$$f([\mathbf{X}_1], \dots, [\mathbf{X}_n]) = \sum_{k=d}^{\infty} u_0^{(k)} + \xi \sum_{k=d}^{\infty} u_1^{(k)} + \cdots + \xi^{m-1} \sum_{k=d}^{\infty} u_{m-1}^{(k)}.$$

Analogicznie jak w punkcie 1, definiujemy rozkład urojony oraz pojęcie części urojonych dla szeregów potęgowych formalnych. Wobec własności 8., definicja ta jest poprawna.

Analogicznie jak własność 1. dowodzimy

Własność 9. *Jeśli szeregi $u_0, \dots, u_{m-1} \in \mathbb{K}[[\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n]]$ postaci*

$$u_j = u_j^{(d)} + u_j^{(d+1)} + \cdots, \quad j = 0, \dots, m-1, \tag{6}$$

gdzie każde $u_j^{(r)}$, $r = d, d+1, \dots$ jest wielomianem jednorodnym stopnia r lub wielomianem zerowym, mają wspólny czynnik dodatniego rzędu, to wielomiany $u_0^{(d)}, \dots, u_{m-1}^{(d)}$ również mają wspólny czynnik dodatniego rzędu.

Uogólnieniem twierdzenia 3. jest następujące

Twierdzenie 5. *Załóżmy, że $\mathbb{K}$ jest ciałem, $\mathbb{L} = \mathbb{K}[\xi]$ rozszerzeniem Galois ciała $\mathbb{K}$ stopnia $m > 1$. Jeśli $f \in \mathbb{L}[[Z_1, \dots, Z_n]]$ jest szeregiem niezerowym, a szeregi $u_0, \dots, u_{m-1}$ częściami urojonymi f, to $u_0, \dots, u_{m-1}$ nie mają wspólnych czynników w $\mathbb{K}[[\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n]]$ dodatniego rzędu.*

Dowód. Przypuśćmy, że szeregi $u_0, \dots, u_{m-1}$ mają wspólny czynnik w $\mathbb{K}[[\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n]]$ dodatniego rzędu. Przy oznaczeniach własności 9. i 8. wielomiany $u_0^{(d)}, \dots, u_{m-1}^{(d)}$ mają wspólny czynnik dodatniego rzędu oraz

$$f^{(d)}([\mathbf{X}_1], \dots, [\mathbf{X}_n]) = u_0^{(d)} + \xi u_1^{(d)} + \cdots + \xi^{m-1} u_{m-1}^{(d)}.$$

Otrzymana sprzeczność z twierdzeniem 3. kończy dowód. □

W naturalny sposób różniczkujemy szeregi u_j postaci (6):

$$\frac{\partial u_j}{\partial X_k} = \frac{\partial u_j^{(d)}}{\partial X_k} + \frac{\partial u_j^{(d+1)}}{\partial X_k} + \cdots, \quad k, j = 0, \ldots, m-1.$$

Wówczas, analogicznie jak w punkcie 1, można zdefiniować uogólnione warunki Cauchy'ego - Riemanna dla szeregów potęgowych formalnych.

Rozumując analogicznie jak w dowodzie twierdzenia 1. można rozszerzyć tezę tego twierdzenia na klasę szeregów potęgowych formalnych:

Twierdzenie 6. *Załóżmy, że $\mathbb{K}$ jest ciałem charakterystyki zero, $\mathbb{L} = \mathbb{K}[\xi]$ rozszerzeniem ciała $\mathbb{K}$ stopnia $m > 1$ i niech $u_0, \ldots, u_{m-1} \in \mathbb{K}[[\mathbf{X}]]$. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

1. *Szeregi $u_0, \ldots, u_{m-1}$ spełniają uogólnione warunki Cauchy'ego - Riemanna.*
2. *Istnieje szereg $f \in \mathbb{L}[[Z]]$ taki, że szeregi $u_0, \ldots, u_{m-1}$ są częściami urojonymi f.*

Uwaga 1. *Załóżmy, że $\mathbb{K}$ jest ciałem charakterystyki zero, $\mathbb{L} = \mathbb{K}[\xi]$ rozszerzeniem ciała $\mathbb{K}$ stopnia $m > 1$. Z twierdzenia 6. można wywnioskować, że jeśli $f \in \mathbb{L}[[Z_1, \ldots, Z_n]]$ jest szeregiem niezerowym, a szeregi $u_0, \ldots, u_{m-1}$ częściami urojonymi f, to $u_0, \ldots, u_{m-1}$ nie mają wspólnych czynników w $\mathbb{K}[[\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n]]$ dodatniego rzędu.*

Podziękowania

Autor pragnie serdecznie podziękować jego Promotorowi, Prof. dr hab. Stanisławowi Spodziei za zaproponowanie problemu i pomoc w zorganizowaniu dowodu.

Literatura

[1] S. Lang: *Algebra*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1973.

[2] A. Nowicki i S. Spodzieja: *Polynomial imaginary decompositions for finite extensions of fields of characteristic zero*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 51 (2003), 157–168.

[3] A. Schinzel: *Polynomials with Special Regard to Reducibility*, Cambridge University Press, Cambridge 2000.

Polynomial imaginary decompositions for finite Galois's extensions

Let $\mathbb{K}$ be a field of characteristic zero, $\mathbb{L} = \mathbb{K}[\xi]$ a finite field extension of $\mathbb{K}$ of degree $m > 1$ and $f \in \mathbb{L}[Z]$ a non-zero polynomial. There exist unique polynomials $u_0, \ldots, u_{m-1} \in \mathbb{K}[X_0, \ldots, X_{m-1}]$ such that

$$f(X_0 + \xi X_1 + \cdots \xi^{m-1} X_{m-1}) = u_0 + \xi u_1 + \cdots \xi^{m-1} u_{m-1}.$$

In [2] A. Nowicki and S. Spodzieja proved that $\gcd(u_0, \ldots, u_{m-1}) = 1$. In the paper we prove it, under the assumption, that $\mathbb{L}$ is a finite field Galois's extension of $\mathbb{K}$ of any characteristic.

Łódź, 7 – 11 stycznia 2008 r.