MATERIAŁY XXVI KONFERENCJI SZKOLENIOWEJ Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ ZESPOLONEJ

2005 **Łódź** **str. 9**

O WŁOŻENIU FUNKCJI MEROMORFICZNYCH W LICZBY ZESPOLONE

Marek Golasiński (Toruń)

Abstrakt. Konstruujemy włożenie $\mathcal{M}(\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathbb{C}$ ciała funkcji meromorficznych $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ na płaszczyźnie zespolonej w ciało liczb zespolonych $\mathbb{C}$. Stąd wynika izomorfizm ciał $\overline{\mathcal{M}(\mathbb{C})} \overset{\cong}{\to} \mathbb{C}$, gdzie $\overline{\mathcal{M}(\mathbb{C})}$ jest domknięciem algebraicznym ciała $\mathcal{M}(\mathbb{C})$.

Niech $\mathbb{K}$ oznacza ciało liczb rzeczywistch $\mathbb{R}$ lub zespolonych $\mathbb{C}$, zaś $\mathcal{E}(\mathbb{K})$ pierścień (bez dzielników zera) funkcji całkowitych nad $\mathbb{K}$, tzn. funkcji danych przez szeregi potęgowe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, gdzie $a_n \in \mathbb{K}$ dla $n = 0, 1, \ldots$ oraz $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 0$. Ponieważ dowolna funkcja $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ rozszerza się jednoznacznie do funkcji całkowitej nad $\mathbb{C}$, więc istnieje inkluzja pierścieni $\mathcal{E}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{E}(\mathbb{C})$. Ponadto istnieje izomorfizm pierścieni $\mathcal{E}(\mathbb{R})(j) \overset{\cong}{\to} \mathcal{E}(\mathbb{C})$, gdzie $j^2 = -1$. Oczywiście $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ jest podpierścieniem pierścienia $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ rzeczywistych funkcji ciągłych na prostej.

Oznaczmy przez $\mathcal{E}(\mathbb{R})_{(0)}$ oraz $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ (ciało *funkcji meromorficznych* na płaszczyźnie zespolonej) ciała ułamków odpowiednio pierścienia $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ oraz $\mathcal{E}(\mathbb{C})$. Celem tej krótkiej pracy jest udowodnienie

Twierdzenie 1. *Dla ciała $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ funkcji meromoroficznych istnieje włożenie ciał*

$$\mathcal{M}(\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathbb{C}\,.$$

W szczególności, wynika stąd izomorfizm $\overline{\mathcal{M}(\mathbb{C})} \overset{\cong}{\to} \mathbb{C}$ dla algebraicznego domknięcia $\overline{\mathcal{M}(\mathbb{C})}$.

Dowód. Na podstawie [1, 4F, p. 61] istnieje z-ultrafiltr $\mathcal{F}$ na prostej $\mathbb{R}$ zawierający tylko zbiory nieskończonej miary zewnętrznej Lebesgue'a. Niech $\mathfrak{m}_{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{C}(\mathbb{R})$ będzie odpowiadającym ideałem maksymalnym. Ponieważ zbiór zer dowolnej niezerowej funkcji pierścienia $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ jest dyskretny, więc $\mathfrak{m}_{\mathcal{F}} \cap \mathcal{E}(\mathbb{R}) = (0)$. Wobec tego kanoniczne odwzorowanie $\mathcal{E}(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R})/\mathfrak{m}_{\mathcal{F}}$ jest monomorfizmem oraz wyznacza włożenie ciał $\mathcal{E}(\mathbb{R})_{(0)} \hookrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R})/\mathfrak{m}_{\mathcal{F}}$.

Ale izomorfizm pierścieni $\mathcal{E}(\mathbb{R})(j) \overset{\cong}{\to} \mathcal{E}(\mathbb{C})$ wyznacza izomorfizm ciał $(\mathcal{E}(\mathbb{R})_{(0)})(j) \overset{\cong}{\to} \mathcal{M}(\mathbb{C})$, więc wnioskujemy stąd istnienie włożenia $\mathcal{M}(\mathbb{C}) \hookrightarrow (\mathcal{C}(\mathbb{R})/\mathfrak{m}_{\mathcal{F}})(j)$. Na podstawie [1, Theorem 13.4] ciało $\mathcal{C}(\mathbb{R})/\mathfrak{m}_{\mathcal{F}}$ jest rzeczywiście domknięte, więc rozszerzenie $(\mathcal{C}(\mathbb{R})/\mathfrak{m}_{\mathcal{F}})(j)$ jest algebraicznie domknięte. Ponieważ stopień transcendencji ciała $\mathcal{C}(\mathbb{R})/\mathfrak{m}_{\mathcal{F}}$ nad liczbami wymiernymi jest $2^{\aleph_0}$, więc twierdzenie Steinitza [3] prowadzi do izomorfizmu $(\mathcal{C}(\mathbb{R})/\mathfrak{m}_{\mathcal{F}})(j) \overset{\cong}{\to} \mathbb{C}$. Stąd wnioskujemy włożenie ciał $\mathcal{M}(\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathbb{C}$ oraz izomorfizm $\overline{\mathcal{M}(\mathbb{C})} \overset{\cong}{\to} \mathbb{C}$ dla algebraicznego domknięcia $\overline{\mathcal{M}(\mathbb{C})}$. $\square$

Na zakończenie, używając powyższych oznaczeń, podamy inne interesujące własności ciała $\mathcal{E}(\mathbb{R})_{(0)}$. Zauważmy, że ciało $\mathcal{C}(\mathbb{R})/\mathfrak{m}_{\mathcal{F}}$ jest rzeczywistym domknięciem formalnie rzeczywistego ciała ułamków $\mathcal{E}(\mathbb{R})_{(0)}$. Ponadto, na podstawie [2], każda nieujemna funkcja $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ jest sumą dwu kwadratów pewnych funkcji pierścienia $\mathcal{E}(\mathbb{R})$. Wobec tego dowolny element $f/g \in \mathcal{E}(\mathbb{R})_{(0)}$ jest również sumą dwu kwadratów pewnych ułamków ciała $\mathcal{E}(\mathbb{R})_{(0)}$, o ile funkcje $f, g \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ są jednocześnie dodatnie lub ujemne.

Ponadto, jeśli funkcje $f, g \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ są jednocześnie dodatnie lub ujemne na półprostej $\{x \in \mathbb{R};\, x \geq 0\}$ (odpowiednio $\{x \in \mathbb{R};\, x \leq 0\}$), to funkcje $\tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ są jednocześnie dodatnie lub ujemne na prostej, gdzie $\tilde{f}(x) = f(x^2)$ oraz $\tilde{g}(x) = g(x^2)$ (odpowiednio $\tilde{f}(x) = f(-x^2)$ oraz $\tilde{g}(x) = g(-x^2)$) dla $x \in \mathbb{R}$. Wobec tego $\tilde{f}/\tilde{g} \in \mathcal{E}(\mathbb{R})_{(0)}$ jest również sumą dwu kwadratów pewnych ułamków ciała $\mathcal{E}(\mathbb{R})_{(0)}$.

References

[1] L. Gillman and M. Jerison, *Rings of continuous functions*, D. van Nostrand Company, Inc., Princeton, New Jersey 1960.

[2] Lee A. Rubel, *Sums of squares of real entire functions of one variable*, Proceedings of the Conference on Complex Analysis (Tianjin, 1992), 180-187, Conf. Proc. Lecture Notes Anal., I, Internat. Press, Cambridge MA (1994).

[3] E. Steinitz, *Algebraische Theorie der Körper*, Walter de Gruyter and Co., Berlin 1930.

ON EMBEDDING OF MEROMORPHIC FUNCTIONS INTO COMPLEX NUMBERS

Summary. We construct an embedding $\mathcal{M}(\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathbb{C}$ of meromorphic functions $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ on the complex plane into the complex numbers $\mathbb{C}$. Then, an isomorphism $\overline{\mathcal{M}(\mathbb{C})} \stackrel{\cong}{\to} \mathbb{C}$ is derived, for the algebraic closure $\overline{\mathcal{M}(\mathbb{C})}$ of the field $\mathcal{M}(\mathbb{C})$.

Łódź, 10 – 14 stycznia 2005 r.