Osobliwości korangi dwa generycznych odwzorowań wielomianowych

Michał Farnik (Uniwersytet Jagielloński)

w ramach wspólnego projektu z Z. Jelonkiem (IM PAN),
P. Migusem (PŚk) i M.A.S. Ruas (ICMC-USP)

Łódź, 10 stycznia 2018

Niech $\Omega_n(d_1, \ldots, d_n)$ oznacza przestrzeń odwzorowań wielomianowych $F = (f_1, \ldots, f_n) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ o stopniach ograniczonych przez $d_1, \ldots, d_n$.

Oczywiście $\Omega_n(d_1, \ldots, d_n)$ ma strukturę przestrzeni afinicznej.

Mówimy, że ogólne odwzorowanie w $\Omega_n(d_1, \ldots, d_n)$ ma własność $\mathcal{P}$, jeśli istnieje taki niepusty podzbiór $U \subset \Omega_n(d_1, \ldots, d_n)$ otwarty (więc gęsty) w topologii Zariskiego, że każde odwzorowanie $F \in U$ ma własność $\mathcal{P}$.

Niech $\Omega_n(d_1, \ldots, d_n)$ oznacza przestrzeń odwzorowań wielomianowych $F = (f_1, \ldots, f_n) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ o stopniach ograniczonych przez $d_1, \ldots, d_n$.

Oczywiście $\Omega_n(d_1, \ldots, d_n)$ ma strukturę przestrzeni afinicznej.

Mówimy, że ogólne odwzorowanie w $\Omega_n(d_1, \ldots, d_n)$ ma własność $\mathcal{P}$, jeśli istnieje taki niepusty podzbiór $U \subset \Omega_n(d_1, \ldots, d_n)$ otwarty (więc gęsty) w topologii Zariskiego, że każde odwzorowanie $F \in U$ ma własność $\mathcal{P}$.

Przez $J^q(n)$ oznaczamy przestrzeń q-dżetów odwzorowań wielomianowych $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$.

Przestrzeń $J^q(n)$ możemy utożsamić z przestrzenią $\mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^{N_q})^n$, gdzie $\mathbb{C}^{N_q}$ parametryzuje współczynniki wielomianów n zmiennych o stopniu ograniczonym przez q.

Dla ustalonego odwzorowania wielomianowego $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ mamy odwzorowanie

$$j^q(F) : \mathbb{C}^n \ni x \mapsto \left(x, F(x), \left(\frac{\partial^{|\alpha|} f_i}{\partial x^\alpha}(x) \right)_{1 \le i \le n, 1 \le |\alpha| \le q} \right) \in J^q(n).$$

Przez $J^q(n)$ oznaczamy przestrzeń q-dżetów odwzorowań wielomianowych $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$.
Przestrzeń $J^q(n)$ możemy utożsamić z przestrzenią $\mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^{N_q})^n$, gdzie $\mathbb{C}^{N_q}$ parametryzuje współczynniki wielomianów n zmiennych o stopniu ograniczonym przez q.

Dla ustalonego odwzorowania wielomianowego $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ mamy odwzorowanie

$$j^q(F) : \mathbb{C}^n \ni x \mapsto \left(x, F(x), \left(\frac{\partial^{|\alpha|} f_i}{\partial x^\alpha}(x) \right)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq |\alpha| \leq q} \right) \in J^q(n).$$

Twierdzenie

Załóżmy, że $d_i \geq q$ *dla* $i = 1, \dots, n$. *Niech* $S_1, \dots, S_k$ *będą gładkimi podrozmaitościami algebraicznymi* $J^q(n)$. *Wtedy istnieje taki podzbiór* $U(S_1, \dots, S_k) \subset \Omega_n(d_1, \dots, d_n)$ *otwarty i gęsty w topologii Zariskiego, że dla każdego* $F \in U(S_1, \dots, S_k)$ *mamy*

$$j^q(F) \pitchfork S_i, \quad dla\ i = 1, \dots, k.$$

Wykorzystujemy stratyfikację Thoma-Boardmana $S_{r_1,\ldots,r_k}$ dla $r_1 \geqslant \ldots \geqslant r_k \geqslant 0$ przestrzeni $J^k(X, Y)$.

Jeśli $j^l F \pitchfork S_{t_1,\ldots,t_l}$ dla wszystkich $l < k$, to $S_{r_1,\ldots,r_k}(F) = \{x : \text{corank } F|S_{r_1,\ldots,r_{k-1}}(F) = r_k\}$ jest poprawnie zdefiniowaną rozmaitością i $x \in S_{r_1,\ldots,r_k}(F) \Leftrightarrow j^k F(x) \in S_{r_1,\ldots,r_k}$.

Mówimy, że F jest generyczne, jeśli F jest właściwe i $j^k F \pitchfork S_{r_1,\ldots,r_k}$ dla każdego k i wszystkich warstw.

Wykorzystujemy stratyfikację Thoma-Boardmana $S_{r_1,\ldots,r_k}$ dla $r_1 \geqslant \ldots \geqslant r_k \geqslant 0$ przestrzeni $J^k(X, Y)$.

Jeśli $j^l F \pitchfork S_{t_1,\ldots,t_l}$ dla wszystkich $l < k$, to $S_{r_1,\ldots,r_k}(F) = \{x : \text{corank}\, F|S_{r_1,\ldots,r_{k-1}}(F) = r_k\}$ jest poprawnie zdefiniowaną rozmaitością i $x \in S_{r_1,\ldots,r_k}(F) \Leftrightarrow j^k F(x) \in S_{r_1,\ldots,r_k}$.

Mówimy, że F jest generyczne, jeśli F jest właściwe i $j^k F \pitchfork S_{r_1,\ldots,r_k}$ dla każdego k i wszystkich warstw.

Wykorzystujemy stratyfikację Thoma-Boardmana $S_{r_1,\ldots,r_k}$ dla $r_1 \geqslant \ldots \geqslant r_k \geqslant 0$ przestrzeni $J^k(X, Y)$.

Jeśli $j^l F \pitchfork S_{t_1,\ldots,t_l}$ dla wszystkich $l < k$, to $S_{r_1,\ldots,r_k}(F) = \{x : \text{corank}\, F|S_{r_1,\ldots,r_{k-1}}(F) = r_k\}$ jest poprawnie zdefiniowaną rozmaitością i $x \in S_{r_1,\ldots,r_k}(F) \Leftrightarrow j^k F(x) \in S_{r_1,\ldots,r_k}$.

Mówimy, że F jest generyczne, jeśli F jest właściwe i $j^k F \pitchfork S_{r_1,\ldots,r_k}$ dla każdego k i wszystkich warstw.

Mówimy, że kiełek $F : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ ma osobliwość typu A_k, jeśli jest biholomorficznie równoważny z kiełkiem

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n^{k+1} + x_{n-1}x_n^{k-1} + \ldots + x_{n-k+1}x_n).$$

Dla generycznego odwzorowania $F = (f_1, \ldots, f_n) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ wszystkie osobliwości korangi jeden są typu A_k.

Mówimy, że kiełek $F : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ ma osobliwość typu A_k, jeśli jest biholomorficznie równoważny z kiełkiem

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n^{k+1} + x_{n-1}x_n^{k-1} + \ldots + x_{n-k+1}x_n).$$

Dla generycznego odwzorowania $F = (f_1, \ldots, f_n) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ wszystkie osobliwości korangi jeden są typu A_k.

Niech $s_k = \sum_{0 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \prod_{j=1}^{k} (d_{i_j} - 1)$, wtedy:

- zbiór Sing(F) jest gładki w kowymiarze 3,
- zbiór osobliwości A_1 jest otwartym gęstym podzbiorem Sing(F) stopnia s_1,
- zbiór osobliwości A_2 jest otwartym gęstym podzbiorem Sing(F) $\setminus A_1$. Ma kowymiar 2 i stopień $s_1^2 + s_2 + s_1$,
- zbiór osobliwości A_3 jest otwartym gęstym podzbiorem Sing(F) $\setminus A_1 \setminus A_2$. Ma kowymiar 3 i stopień $s_1^3 + 3s_1s_2 + 2s_3 - 3s_1^2 - 4s_2 + 2s_1$.

Niech $s_k = \sum_{0 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \prod_{j=1}^{k} (d_{i_j} - 1)$, wtedy:

- zbiór Sing(F) jest gładki w kowymiarze 3,
- zbiór osobliwości A_1 jest otwartym gęstym podzbiorem Sing(F) stopnia s_1,
- zbiór osobliwości A_2 jest otwartym gęstym podzbiorem Sing$(F) \setminus A_1$. Ma kowymiar 2 i stopień $s_1^2 + s_2 + s_1$,
- zbiór osobliwości A_3 jest otwartym gęstym podzbiorem Sing$(F) \setminus A_1 \setminus A_2$. Ma kowymiar 3 i stopień $s_1^3 + 3s_1 s_2 + 2s_3 - 3s_1^2 - 4s_2 + 2s_1$.

Niech $s_k = \sum_{0 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \prod_{j=1}^{k} (d_{i_j} - 1)$, wtedy:

- zbiór Sing(F) jest gładki w kowymiarze 3,
- zbiór osobliwości A_1 jest otwartym gęstym podzbiorem Sing(F) stopnia s_1,
- zbiór osobliwości A_2 jest otwartym gęstym podzbiorem Sing(F) $\setminus A_1$. Ma kowymiar 2 i stopień $s_1^2 + s_2 + s_1$,
- zbiór osobliwości A_3 jest otwartym gęstym podzbiorem Sing(F) $\setminus A_1 \setminus A_2$. Ma kowymiar 3 i stopień $s_1^3 + 3s_1s_2 + 2s_3 - 3s_1^2 - 4s_2 + 2s_1$.

Niech $s_k = \sum_{0 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \prod_{j=1}^{k} (d_{i_j} - 1)$, wtedy:

- zbiór Sing(F) jest gładki w kowymiarze 3,
- zbiór osobliwości A_1 jest otwartym gęstym podzbiorem Sing(F) stopnia s_1,
- zbiór osobliwości A_2 jest otwartym gęstym podzbiorem Sing(F) $\setminus A_1$. Ma kowymiar 2 i stopień $s_1^2 + s_2 + s_1$,
- zbiór osobliwości A_3 jest otwartym gęstym podzbiorem Sing(F) $\setminus A_1 \setminus A_2$. Ma kowymiar 3 i stopień $s_1^3 + 3s_1s_2 + 2s_3 - 3s_1^2 - 4s_2 + 2s_1$.

Niech $s_k = \sum_{0 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \prod_{j=1}^{k} (d_{i_j} - 1)$, wtedy:

- zbiór $\mathrm{Sing}(F)$ jest gładki w kowymiarze 3,
- zbiór osobliwości A_1 jest otwartym gęstym podzbiorem $\mathrm{Sing}(F)$ stopnia s_1,
- zbiór osobliwości A_2 jest otwartym gęstym podzbiorem $\mathrm{Sing}(F) \setminus A_1$. Ma kowymiar 2 i stopień $s_1^2 + s_2 + s_1$,
- zbiór osobliwości A_3 jest otwartym gęstym podzbiorem $\mathrm{Sing}(F) \setminus A_1 \setminus A_2$. Ma kowymiar 3 i stopień $s_1^3 + 3s_1 s_2 + 2s_3 - 3s_1^2 - 4s_2 + 2s_1$.

Mówimy, że kiełek $F : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ ma osobliwość typu Σ_2, jeśli jest biholomorficznie równoważny z kiełkiem

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1^2 + 2x_2x_3, x_2^2 + x_1x_4, x_3, x_4, \ldots, x_n).$$

Zbiór $\mathrm{Sing}(F) \setminus A_1 \setminus A_2 \setminus A_3$ posiada dwie składowe. Pierwszą jest $\mathrm{Sing}(\mathrm{Sing}(F))$, jego otwartym gęstym podzbiorem jest zbiór osobliwości Σ_2. Drugą jest $\mathrm{Sing}(F) \setminus \mathrm{Sing}(\mathrm{Sing}(F)) \setminus A_1 \setminus A_2 \setminus A_3$, jego otwartym gęstym podzbiorem jest zbiór osobliwości A_4.

Mówimy, że kiełek $F:(\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C}^n,0)$ ma osobliwość typu Σ_2, jeśli jest biholomorficznie równoważny z kiełkiem

$$(x_1,\dots,x_n)\mapsto(x_1^2+2x_2x_3,x_2^2+x_1x_4,x_3,x_4,\dots,x_n).$$

Zbiór $\mathrm{Sing}(F)\setminus A_1\setminus A_2\setminus A_3$ posiada dwie składowe. Pierwszą jest $\mathrm{Sing}(\mathrm{Sing}(F))$, jego otwartym gęstym podzbiorem jest zbiór osobliwości Σ_2. Drugą jest $\mathrm{Sing}(F)\setminus\mathrm{Sing}(\mathrm{Sing}(F))\setminus A_1\setminus A_2\setminus A_3$, jego otwartym gęstym podzbiorem jest zbiór osobliwości A_4.

Niech $F = (f_1, \ldots, f_n) \in \Omega_n(d_1, \ldots, d_n)$ będzie ogólnym odwzorowaniem.

Niech $M = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right] = [f_{ij}]$ będzie macierzą Jacobiego F.

Dla $I, J \subset \{1, \ldots, n\}$ przez M^I_J oznaczamy podmacierz M zawierającą wiersze z I oraz kolumny z J.

Naszym celem jest wyznaczenie stopnia rozmaitości zadanych warunkiem rank $M^I_J \leqslant r$. Oznaczamy go przez $m^I_J(r)$.

Oczywiście dla $|I| = |J| = r + 1$ mamy $m^I_J(r) = \deg V(\operatorname{rank} M^I_J \leqslant r) = s_1(I) = \sum_{i \in I}(d_i - 1)$.

Niech $F = (f_1, \dots, f_n) \in \Omega_n(d_1, \dots, d_n)$ będzie ogólnym odwzorowaniem.
Niech $M = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right] = [f_{ij}]$ będzie macierzą Jacobiego F.
Dla $I, J \subset \{1, \dots, n\}$ przez M_J^I oznaczamy podmacierz M zawierającą wiersze z I oraz kolumny z J.
Naszym celem jest wyznaczenie stopnia rozmaitości zadanych warunkiem $\operatorname{rank} M_J^I \leqslant r$. Oznaczamy go przez $m_J^I(r)$.
Oczywiście dla $|I| = |J| = r + 1$ mamy $m_J^I(r) = \deg V(\operatorname{rank} M_J^I \leqslant r) = s_1(I) = \sum_{i \in I}(d_i - 1)$.

Niech $F = (f_1, \ldots, f_n) \in \Omega_n(d_1, \ldots, d_n)$ będzie ogólnym odwzorowaniem.
Niech $M = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right] = \left[f_{ij}\right]$ będzie macierzą Jacobiego F.
Dla $I, J \subset \{1, \ldots, n\}$ przez M^I_J oznaczamy podmacierz M zawierającą wiersze z I oraz kolumny z J.
Naszym celem jest wyznaczenie stopnia rozmaitości zadanych warunkiem rank $M^I_J \leqslant r$. Oznaczamy go przez $m^I_J(r)$.
Oczywiście dla $|I| = |J| = r + 1$ mamy $m^I_J(r) = \deg V(\operatorname{rank} M^I_J \leqslant r) = s_1(I) = \sum_{i \in I}(d_i - 1)$.

Niech $F = (f_1, \ldots, f_n) \in \Omega_n(d_1, \ldots, d_n)$ będzie ogólnym odwzorowaniem.
Niech $M = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right] = [f_{ij}]$ będzie macierzą Jacobiego F.
Dla $I, J \subset \{1, \ldots, n\}$ przez M^I_J oznaczamy podmacierz M zawierającą wiersze z I oraz kolumny z J.
Naszym celem jest wyznaczenie stopnia rozmaitości zadanych warunkiem rank $M^I_J \leqslant r$. Oznaczamy go przez $m^I_J(r)$.
Oczywiście dla $|I| = |J| = r + 1$ mamy $m^I_J(r) = \deg V(\operatorname{rank} M^I_J \leqslant r) = s_1(I) = \sum_{i \in I}(d_i - 1)$.

Niech $F = (f_1, \ldots, f_n) \in \Omega_n(d_1, \ldots, d_n)$ będzie ogólnym odwzorowaniem.
Niech $M = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right] = \left[f_{ij}\right]$ będzie macierzą Jacobiego F.
Dla $I, J \subset \{1, \ldots, n\}$ przez M^I_J oznaczamy podmacierz M zawierającą wiersze z I oraz kolumny z J.
Naszym celem jest wyznaczenie stopnia rozmaitości zadanych warunkiem $\operatorname{rank} M^I_J \leqslant r$. Oznaczamy go przez $m^I_J(r)$.
Oczywiście dla $|I| = |J| = r + 1$ mamy
$m^I_J(r) = \deg V(\operatorname{rank} M^I_J \leqslant r) = s_1(I) = \sum_{i \in I}(d_i - 1)$.

Obliczmy deg $V(\text{rank } M^I_J \leqslant r)$ dla $|I| = r+1$, $|J| = r+2$ oraz $|I| = r+2$, $|J| = r+1$.
Na przykład:

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} \end{bmatrix}$$

Mamy

$$V\left(\operatorname{rank}\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \end{bmatrix} \leqslant 3\right) =$$

$$V\left(\operatorname{rank}\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{34} \end{bmatrix} \leqslant 3\right) \cap V\left(\operatorname{rank}\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \leqslant 3\right)$$

$$-V\left(\operatorname{rank}\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \\ f_{31} & f_{32} \end{bmatrix} \leqslant 2\right)$$

Podobnie

$$V\left(\operatorname{rank}\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} \end{bmatrix} \leqslant 3\right) =$$

$$V\left(\operatorname{rank}\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} \end{bmatrix} \leqslant 3\right) \cap V\left(\operatorname{rank}\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \leqslant 3\right)$$

$$-V\left(\operatorname{rank}\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \end{bmatrix} \leqslant 2\right)$$

Ogólnie dla $|I| = r + 1$, $|J| = r + 2$ mamy

$$m^I_J(r) = m^I_{J\setminus\{j_1\}}(r) \cdot m^I_{J\setminus\{j_2\}}(r) - m^I_{J\setminus\{j_1,j_2\}}(r-1) =$$

$$s_1^2(I) - m^I_{J\setminus\{j_1,j_2\}}(r-1)$$

Natomiast dla $|I| = r + 2$, $|J| = r + 1$ mamy

$$m^I_J(r) = m^{I\setminus\{i_1\}}_J(r) \cdot m^{I\setminus\{i_2\}}_J(r) - m^{I\setminus\{i_1,i_2\}}_J(r-1) =$$

$$s_1(I \setminus \{i_1\}) \cdot s_1(I \setminus \{i_2\}) - m^{I\setminus\{i_1,i_2\}}_J(r-1) =$$

$$s_1^2(I\setminus\{i_1,i_2\}) - m^{I\setminus\{i_1,i_2\}}_J(r-1) + (d_{i_1} + d_{i_1} - 2)s_1(I\setminus\{i_1,i_2\}) + (d_{i_1} - 1)(d_{i_2} - 1) =$$

$$(s_1^2 - s_2)(I \setminus \{i_1, i_2\}) - m^{I\setminus\{i_1,i_2\}}_J(r-1) + s_2(I)$$

Ogólnie dla $|I| = r + 1$, $|J| = r + 2$ mamy

$$m^I_J(r) = m^I_{J\setminus\{j_1\}}(r) \cdot m^I_{J\setminus\{j_2\}}(r) - m^I_{J\setminus\{j_1,j_2\}}(r-1) =$$

$$s_1^2(I) - m^I_{J\setminus\{j_1,j_2\}}(r-1)$$

Natomiast dla $|I| = r + 2$, $|J| = r + 1$ mamy

$$m^I_J(r) = m_J^{I\setminus\{i_1\}}(r) \cdot m_J^{I\setminus\{i_2\}}(r) - m_J^{I\setminus\{i_1,i_2\}}(r-1) =$$

$$s_1(I \setminus \{i_1\}) \cdot s_1(I \setminus \{i_2\}) - m_J^{I\setminus\{i_1,i_2\}}(r-1) =$$

$$s_1^2(I\setminus\{i_1, i_2\}) - m_J^{I\setminus\{i_1,i_2\}}(r-1) + (d_{i_1} + d_{i_1} - 2)s_1(I\setminus\{i_1, i_2\}) + (d_{i_1} - 1)(d_{i_2} - 1) =$$

$$(s_1^2 - s_2)(I \setminus \{i_1, i_2\}) - m_J^{I\setminus\{i_1,i_2\}}(r-1) + s_2(I)$$

Ogólnie dla $|I| = r + 1$, $|J| = r + 2$ mamy

$$m^I_J(r) = m^I_{J\setminus\{j_1\}}(r) \cdot m^I_{J\setminus\{j_2\}}(r) - m^I_{J\setminus\{j_1,j_2\}}(r-1) =$$

$$s_1^2(I) - m^I_{J\setminus\{j_1,j_2\}}(r-1)$$

Natomiast dla $|I| = r + 2$, $|J| = r + 1$ mamy

$$m^I_J(r) = m_J^{I\setminus\{i_1\}}(r) \cdot m_J^{I\setminus\{i_2\}}(r) - m_J^{I\setminus\{i_1,i_2\}}(r-1) =$$

$$s_1(I \setminus \{i_1\}) \cdot s_1(I \setminus \{i_2\}) - m_J^{I\setminus\{i_1,i_2\}}(r-1) =$$

$$s_1^2(I\setminus\{i_1,i_2\}) - m_J^{I\setminus\{i_1,i_2\}}(r-1) + (d_{i_1}+d_{i_1}-2)s_1(I\setminus\{i_1,i_2\}) + (d_{i_1}-1)(d_{i_2}-1) =$$

$$(s_1^2 - s_2)(I \setminus \{i_1,i_2\}) - m_J^{I\setminus\{i_1,i_2\}}(r-1) + s_2(I)$$

Ogólnie dla $|I| = r+1$, $|J| = r+2$ mamy

$$m_J^I(r) = m^I_{J\setminus\{j_1\}}(r)\cdot m^I_{J\setminus\{j_2\}}(r) - m^I_{J\setminus\{j_1,j_2\}}(r-1) =$$

$$s_1^2(I) - m^I_{J\setminus\{j_1,j_2\}}(r-1)$$

Natomiast dla $|I| = r+2$, $|J| = r+1$ mamy

$$m_J^I(r) = m_J^{I\setminus\{i_1\}}(r)\cdot m_J^{I\setminus\{i_2\}}(r) - m_J^{I\setminus\{i_1,i_2\}}(r-1) =$$

$$s_1(I\setminus\{i_1\})\cdot s_1(I\setminus\{i_2\}) - m_J^{I\setminus\{i_1,i_2\}}(r-1) =$$

$$s_1^2(I\setminus\{i_1,i_2\}) - m_J^{I\setminus\{i_1,i_2\}}(r-1) + (d_{i_1}+d_{i_1}-2)s_1(I\setminus\{i_1,i_2\}) + (d_{i_1}-1)(d_{i_2}-1) =$$

$$(s_1^2 - s_2)(I\setminus\{i_1,i_2\}) - m_J^{I\setminus\{i_1,i_2\}}(r-1) + s_2(I)$$

Zatem poprzez indukcję ze względu na r możemy pokazać, że:

- dla $|I| = r+1$, $|J| = r+2$ mamy $m^I_J(r) = (s_1^2 - s_2)(I)$
- dla $|I| = r+2$, $|J| = r+1$ mamy $m^I_J(r) = s_2(I)$

Policzmy jeszcze $m^I_J(r)$ dla $|I| = r+1$, $|J| = r+3$ oraz $|I| = r+3$, $|J| = r+1$

Zatem poprzez indukcję ze względu na r możemy pokazać, że:

- dla $|I| = r + 1$, $|J| = r + 2$ mamy $m_J^I(r) = (s_1^2 - s_2)(I)$
- dla $|I| = r + 2$, $|J| = r + 1$ mamy $m_J^I(r) = s_2(I)$

Policzmy jeszcze $m_J^I(r)$ dla $|I| = r + 1$, $|J| = r + 3$ oraz $|I| = r + 3$, $|J| = r + 1$

$$\begin{bmatrix} \color{red}{f_{11}} & \color{red}{f_{12}} & \color{red}{f_{13}} & \color{red}{f_{14}} & \color{red}{f_{15}} & \color{red}{f_{16}} \\ \color{red}{f_{21}} & \color{red}{f_{22}} & \color{red}{f_{23}} & \color{red}{f_{24}} & \color{red}{f_{25}} & \color{red}{f_{26}} \\ \color{red}{f_{31}} & \color{red}{f_{32}} & \color{red}{f_{33}} & \color{red}{f_{34}} & \color{red}{f_{35}} & \color{red}{f_{36}} \\ \color{red}{f_{41}} & \color{red}{f_{42}} & \color{red}{f_{43}} & \color{red}{f_{44}} & \color{red}{f_{45}} & \color{red}{f_{46}} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \color{red}{f_{11}} & \color{red}{f_{12}} & \color{red}{f_{13}} & \color{red}{f_{14}} & \color{red}{f_{15}} & f_{16} \\ \color{red}{f_{21}} & \color{red}{f_{22}} & \color{red}{f_{23}} & \color{red}{f_{24}} & \color{red}{f_{25}} & f_{26} \\ \color{red}{f_{31}} & \color{red}{f_{32}} & \color{red}{f_{33}} & \color{red}{f_{34}} & \color{red}{f_{35}} & f_{36} \\ \color{red}{f_{41}} & \color{red}{f_{42}} & \color{red}{f_{43}} & \color{red}{f_{44}} & \color{red}{f_{45}} & f_{46} \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} \color{red}{f_{11}} & \color{red}{f_{12}} & \color{red}{f_{13}} & f_{14} & f_{15} & \color{red}{f_{16}} \\ \color{red}{f_{21}} & \color{red}{f_{22}} & \color{red}{f_{23}} & f_{24} & f_{25} & \color{red}{f_{26}} \\ \color{red}{f_{31}} & \color{red}{f_{32}} & \color{red}{f_{33}} & f_{34} & f_{35} & \color{red}{f_{36}} \\ \color{red}{f_{41}} & \color{red}{f_{42}} & \color{red}{f_{43}} & f_{44} & f_{45} & \color{red}{f_{46}} \end{bmatrix} -$$

$$\begin{bmatrix} \color{red}{f_{11}} & \color{red}{f_{12}} & \color{red}{f_{13}} & \color{red}{f_{14}} & \color{red}{f_{15}} & f_{16} \\ \color{red}{f_{21}} & \color{red}{f_{22}} & \color{red}{f_{23}} & \color{red}{f_{24}} & \color{red}{f_{25}} & f_{26} \\ \color{red}{f_{31}} & \color{red}{f_{32}} & \color{red}{f_{33}} & \color{red}{f_{34}} & \color{red}{f_{35}} & f_{36} \\ \color{red}{f_{41}} & \color{red}{f_{42}} & \color{red}{f_{43}} & \color{red}{f_{44}} & \color{red}{f_{45}} & f_{46} \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} \color{red}{f_{11}} & \color{red}{f_{12}} & \color{red}{f_{13}} & f_{14} & f_{15} & f_{16} \\ \color{red}{f_{21}} & \color{red}{f_{22}} & \color{red}{f_{23}} & f_{24} & f_{25} & f_{26} \\ \color{red}{f_{31}} & \color{red}{f_{32}} & \color{red}{f_{33}} & f_{34} & f_{35} & f_{36} \\ \color{red}{f_{41}} & \color{red}{f_{42}} & \color{red}{f_{43}} & f_{44} & f_{45} & f_{46} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & f_{15} & f_{16} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} & f_{25} & f_{26} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} & f_{35} & f_{36} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} & f_{45} & f_{46} \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & f_{15} & f_{16} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} & f_{25} & f_{26} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} & f_{35} & f_{36} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} & f_{45} & f_{46} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & f_{15} & f_{16} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} & f_{25} & f_{26} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} & f_{35} & f_{36} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} & f_{45} & f_{46} \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & f_{15} & f_{16} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} & f_{25} & f_{26} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} & f_{35} & f_{36} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} & f_{45} & f_{46} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & f_{15} & f_{16} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} & f_{25} & f_{26} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} & f_{35} & f_{36} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} & f_{45} & f_{46} \end{bmatrix}$$

Ogólnie dla $|I| = r+1$, $|J| = r+3$ mamy

$$m^I_J(r) = m^I_{J\setminus\{j_1\}}(r)\cdot m^I_{J\setminus\{j_2,j_3\}}(r) - m^I_{J\setminus\{j_1,j_2,j_3\}}(r-1)\cdot m^I_{J\setminus\{j_1,j_4\}}(r) +$$

$$m^I_{J\setminus\{j_1,j_2,j_3,j_4\}}(r-2) =$$

$$(s_1^3 - 2s_2s_1 + s_3)(I) + m^I_{J\setminus\{j_1,j_2,j_3,j_4\}}(r-2)$$

Podobnie dla $|I| = r+3$, $|J| = r+1$ otrzymujemy wzór na $m^I_J(r)$ zależny od $m_J^{I\setminus\{i_1,i_2,i_3,i_4\}}(r-2)$.
Poprzez indukcję ze względu na r możemy pokazać, że:

- dla $|I| = r+1$, $|J| = r+3$ mamy $m^I_J(r) = (s_1^3 - 2s_1s_2 + s_3)(I)$
- dla $|I| = r+3$, $|J| = r+1$ mamy $m^I_J(r) = s_3(I)$

Ogólnie dla $|I| = r+1$, $|J| = r+3$ mamy

$$m^I_J(r) = m^I_{J\setminus\{j_1\}}(r)\cdot m^I_{J\setminus\{j_2,j_3\}}(r) - m^I_{J\setminus\{j_1,j_2,j_3\}}(r-1)\cdot m^I_{J\setminus\{j_1,j_4\}}(r) +$$

$$m^I_{J\setminus\{j_1,j_2,j_3,j_4\}}(r-2) =$$

$$(s_1^3 - 2s_2s_1 + s_3)(I) + m^I_{J\setminus\{j_1,j_2,j_3,j_4\}}(r-2)$$

Podobnie dla $|I| = r+3$, $|J| = r+1$ otrzymujemy wzór na $m^I_J(r)$ zależny od $m_J^{I\setminus\{i_1,i_2,i_3,i_4\}}(r-2)$.

Poprzez indukcję ze względu na r możemy pokazać, że:

- dla $|I| = r+1$, $|J| = r+3$ mamy $m^I_J(r) = (s_1^3 - 2s_1s_2 + s_3)(I)$
- dla $|I| = r+3$, $|J| = r+1$ mamy $m^I_J(r) = s_3(I)$

Ogólnie dla $|I| = r+1$, $|J| = r+3$ mamy

$$m^I_J(r) = m^I_{J\setminus\{j_1\}}(r)\cdot m^I_{J\setminus\{j_2,j_3\}}(r) - m^I_{J\setminus\{j_1,j_2,j_3\}}(r-1)\cdot m^I_{J\setminus\{j_1,j_4\}}(r) +$$

$$m^I_{J\setminus\{j_1,j_2,j_3,j_4\}}(r-2) =$$

$$(s_1^3 - 2s_2s_1 + s_3)(I) + m^I_{J\setminus\{j_1,j_2,j_3,j_4\}}(r-2)$$

Podobnie dla $|I| = r+3$, $|J| = r+1$ otrzymujemy wzór na $m^I_J(r)$ zależny od $m_J^{I\setminus\{i_1,i_2,i_3,i_4\}}(r-2)$.
Poprzez indukcję ze względu na r możemy pokazać, że:

- dla $|I| = r+1$, $|J| = r+3$ mamy $m^I_J(r) = (s_1^3 - 2s_1s_2 + s_3)(I)$
- dla $|I| = r+3$, $|J| = r+1$ mamy $m^I_J(r) = s_3(I)$

Analogicznie pokazujemy również, że:

- dla $|I| = r+1$, $|J| = r+4$ mamy
  $m_J^I(r) = (s_1^4 - 3s_1^2 s_2 + 2s_1 s_3 + s_2^2 - s_4)(I)$
- dla $|I| = r+4$, $|J| = r+1$ mamy $m_J^I(r) = s_4(I)$

Teraz policzymy $m_J^I(r)$ dla $|I| = r+2$, $|J| = r+2$.

Analogicznie pokazujemy również, że:

- dla $|I| = r + 1$, $|J| = r + 4$ mamy
  $m^I_J(r) = (s_1^4 - 3s_1^2 s_2 + 2s_1 s_3 + s_2^2 - s_4)(I)$
- dla $|I| = r + 4$, $|J| = r + 1$ mamy $m^I_J(r) = s_4(I)$

Teraz policzymy $m^I_J(r)$ dla $|I| = r + 2$, $|J| = r + 2$.

$$\begin{bmatrix} \textcolor{red}{f_{11}} & \textcolor{red}{f_{12}} & \textcolor{red}{f_{13}} & \textcolor{red}{f_{14}} \\ \textcolor{red}{f_{21}} & \textcolor{red}{f_{22}} & \textcolor{red}{f_{23}} & \textcolor{red}{f_{24}} \\ \textcolor{red}{f_{31}} & \textcolor{red}{f_{32}} & \textcolor{red}{f_{33}} & \textcolor{red}{f_{34}} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} \textcolor{red}{f_{11}} & \textcolor{red}{f_{12}} & \textcolor{red}{f_{13}} & f_{14} \\ \textcolor{red}{f_{21}} & \textcolor{red}{f_{22}} & \textcolor{red}{f_{23}} & f_{24} \\ \textcolor{red}{f_{31}} & \textcolor{red}{f_{32}} & \textcolor{red}{f_{33}} & f_{34} \\ \textcolor{red}{f_{41}} & \textcolor{red}{f_{42}} & \textcolor{red}{f_{43}} & f_{44} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \textcolor{red}{f_{11}} & \textcolor{red}{f_{12}} & \textcolor{red}{f_{13}} & f_{14} \\ \textcolor{red}{f_{21}} & \textcolor{red}{f_{22}} & \textcolor{red}{f_{23}} & f_{24} \\ \textcolor{red}{f_{31}} & \textcolor{red}{f_{32}} & \textcolor{red}{f_{33}} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} \textcolor{red}{f_{11}} & \textcolor{red}{f_{12}} & f_{13} & \textcolor{red}{f_{14}} \\ \textcolor{red}{f_{21}} & \textcolor{red}{f_{22}} & f_{23} & \textcolor{red}{f_{24}} \\ \textcolor{red}{f_{31}} & \textcolor{red}{f_{32}} & f_{33} & \textcolor{red}{f_{34}} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} \textcolor{red}{f_{11}} & \textcolor{red}{f_{12}} & \textcolor{red}{f_{13}} & f_{14} \\ \textcolor{red}{f_{21}} & \textcolor{red}{f_{22}} & \textcolor{red}{f_{23}} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ \textcolor{red}{f_{41}} & \textcolor{red}{f_{42}} & \textcolor{red}{f_{43}} & f_{44} \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} \textcolor{red}{f_{11}} & \textcolor{red}{f_{12}} & f_{13} & f_{14} \\ \textcolor{red}{f_{21}} & \textcolor{red}{f_{22}} & f_{23} & f_{24} \\ \textcolor{red}{f_{31}} & \textcolor{red}{f_{32}} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} \textcolor{red}{f_{11}} & \textcolor{red}{f_{12}} & \textcolor{red}{f_{13}} & f_{14} \\ \textcolor{red}{f_{21}} & \textcolor{red}{f_{22}} & \textcolor{red}{f_{23}} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ \textcolor{red}{f_{41}} & \textcolor{red}{f_{42}} & \textcolor{red}{f_{43}} & f_{44} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \textcolor{red}{f_{11}} & \textcolor{red}{f_{12}} & \textcolor{red}{f_{13}} & f_{14} \\ \textcolor{red}{f_{21}} & \textcolor{red}{f_{22}} & \textcolor{red}{f_{23}} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} \textcolor{red}{f_{11}} & \textcolor{red}{f_{12}} & f_{13} & \textcolor{red}{f_{14}} \\ \textcolor{red}{f_{21}} & \textcolor{red}{f_{22}} & f_{23} & \textcolor{red}{f_{24}} \\ \textcolor{red}{f_{31}} & \textcolor{red}{f_{32}} & f_{33} & \textcolor{red}{f_{34}} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \textcolor{red}{f_{11}} & \textcolor{red}{f_{12}} & f_{13} & f_{14} \\ \textcolor{red}{f_{21}} & \textcolor{red}{f_{22}} & f_{23} & f_{24} \\ \textcolor{red}{f_{31}} & \textcolor{red}{f_{32}} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} \textcolor{red}{f_{11}} & \textcolor{red}{f_{12}} & \textcolor{red}{f_{13}} & f_{14} \\ \textcolor{red}{f_{21}} & \textcolor{red}{f_{22}} & \textcolor{red}{f_{23}} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix}$$

Zatem

$$\deg V(\operatorname{rank} M_J^{I\setminus\{i_1\}} \leqslant r,\ \operatorname{rank} M^I_{J\setminus\{j_1\}} \leqslant r) =$$

$$s_1^2(I\setminus\{i_1\})\cdot s_1(I\setminus\{i_2\}) - s_2(I\setminus\{i_1\})\cdot s_1(I\setminus\{i_2\})$$
$$-(s_1^2 - s_2)(I\setminus\{i_1,i_2\})\cdot s_1(I\setminus\{i_1\})$$
$$+\deg V(\operatorname{rank} M_{J\setminus\{j_1\}}^{I\setminus\{i_1,i_2\}} \leqslant r-1,\ \operatorname{rank} M^{I\setminus\{i_1\}}_{J\setminus\{j_1,j_2\}} \leqslant r-1)$$

Więc

$$\deg V(\operatorname{rank} M_J^{I\setminus\{i_1\}} \leqslant r,\ \operatorname{rank} M^I_{J\setminus\{j_1\}} \leqslant r) = ((s_1-d_{i_1}+1)s_2-s_3)(I)$$

Zatem

$$\deg V(\operatorname{rank} M_J^{I\setminus\{i_1\}} \leqslant r,\ \operatorname{rank} M^I_{J\setminus\{j_1\}} \leqslant r) =$$

$$s_1^2(I\setminus\{i_1\})\cdot s_1(I\setminus\{i_2\}) - s_2(I\setminus\{i_1\})\cdot s_1(I\setminus\{i_2\})$$
$$-(s_1^2 - s_2)(I\setminus\{i_1,i_2\})\cdot s_1(I\setminus\{i_1\})$$
$$+\deg V(\operatorname{rank} M_{J\setminus\{j_1\}}^{I\setminus\{i_1,i_2\}} \leqslant r-1,\ \operatorname{rank} M^{I\setminus\{i_1\}}_{J\setminus\{j_1,j_2\}} \leqslant r-1)$$

Więc

$$\deg V(\operatorname{rank} M_J^{I\setminus\{i_1\}} \leqslant r,\ \operatorname{rank} M^I_{J\setminus\{j_1\}} \leqslant r) = ((s_1 - d_{i_1} + 1)s_2 - s_3)(I)$$

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix}$$

Zatem dla $|I| = r + 2$, $|J| = r + 2$ zachodzi

$$m^I_J(r) = ((s_1 - d_{i_1} + 1)s_2 - s_3)(I) \cdot s_1(I \setminus \{i_2\}) - s_3(I) \cdot s_1(I \setminus \{i_1\}) + s_4(I)$$
$$-(s_3 - 2s_2s_1 + s_1^3)(I \setminus \{i_1, i_2\}) \cdot s_1(I \setminus \{i_3\})$$
$$-(s_1^4 + 2s_3s_1 + s_2^2 - 3s_2s_1^2 - s_4)(I \setminus \{i_1, i_2, i_3\}) =$$

$$(s_2^2 - s_3s_1)(I)$$

Zatem dla $|I| = r+2$, $|J| = r+2$ zachodzi

$$m^I_J(r) = ((s_1 - d_{i_1} + 1)s_2 - s_3)(I) \cdot s_1(I \backslash \{i_2\}) - s_3(I) \cdot s_1(I \backslash \{i_1\}) + s_4(I)$$

$$-(s_3 - 2s_2 s_1 + s_1^3)(I \setminus \{i_1, i_2\}) \cdot s_1(I \setminus \{i_3\})$$

$$-(s_1^4 + 2s_3 s_1 + s_2^2 - 3s_2 s_1^2 - s_4)(I \setminus \{i_1, i_2, i_3\}) =$$

$$(s_2^2 - s_3 s_1)(I)$$

Wniosek

Niech $F = (f_1, f_2, f_3, f_4) \in \Omega_4(d_1, d_2, d_3, d_4)$ *będzie ogólnym odwzorowaniem. Odwzorowanie* F *posiada dokładnie* $d_1^2 d_2^2 + d_1^2 d_2 d_3 + d_1^2 d_2 d_4 + d_1^2 d_3^2 + d_1^2 d_3 d_4 + d_1^2 d_4^2 + d_1 d_2^2 d_3 + d_1 d_2^2 d_4 + d_1 d_2 d_3^2 + 2d_1 d_2 d_3 d_4 + d_1 d_2 d_4^2 + d_1 d_3^2 d_4 + d_1 d_3 d_4^2 + d_2^2 d_3^2 + d_2^2 d_3 d_4 + d_2^2 d_4^2 + d_2 d_3^2 d_4 + d_2 d_3 d_4^2 + d_3^2 d_4^2 - 4d_1^2 d_2 - 4d_1^2 d_3 - 4d_1^2 d_4 - 4d_1 d_2^2 - 8d_1 d_2 d_3 - 8d_1 d_2 d_4 - 4d + 1d_3^2 - 8d_1 d_3 d_4 - 4d_1 d_4^2 - 4d_2^2 d_3 - 4d_2^2 d_4 - 4d_2 d_3^2 - 8d_2 d_3 d_4 - 4d_2 d_4^2 - 4d_3^2 d_4 - 4d_3 d_4^2 + 6d_1^2 + 16d_1 d_2 + 16d_1 d_3 + 16d_1 d_4 + 6d_2^2 + 16d_2 d_3 + 16d_2 d_4 + 6d_3^2 + 16d_3 d_4 + 6d_4^2 - 20d_1 - 20d_2 - 20d_3 - 20d_4 + 20$ *osobliwości biholomorficznie równoważnych z kiełkiem*

$$(x, y, z, w) \mapsto (x^2 + 2yz, y^2 + xw, z, w).$$

Dziękuję za uwagę.