MATERIAŁY VII KONFERENCJI SZKOLENIOWEJ
Z TEORII ZAGADNIEŃ EKSTREMALNYCH

1986 Łódź s. 14

DIAGRAMY NEWTONA I TWIERDZENIE O DZIELENIU

Z. Denkowska (Kraków)

Wprowadzamy następujące oznaczenia: $k\{x\}$ jest to pierścień szeregów zbieżnych n zmiennych $(x=(x_1,\dots,x_n))$ nad ciałem k liczb rzeczywistych lub zespolonych. Symbol $\mathbb{N}$ oznacza zbiór liczb naturalnych wraz z zerem. Dla $\mu \in \mathbb{N}^n$ zapisujemy $|\mu| = \mu_1 + \dots + \mu_n$ oraz $x^\mu = x_1^{\mu_1}\dots x_n^{\mu_n}$. Elementy $k\{x\}$ mają postać $f = \sum_{\mu\in\mathbb{N}^n} f_\mu x^\mu$, $f_\mu \in k$.

DEFINICJA 1. Niech $f = \sum_{\mu\in\mathbb{N}^n} f_\mu x^\mu$ należy do $k\{x\}$. Diagramem Newtona szeregu f nazywamy podzbiór $N_f = \{\mu \in \mathbb{N}^n;\ f_\mu \neq 0\}$ zbioru $\mathbb{N}^n$.

Przypomnijmy teraz klasyczne twierdzenie Weierstrassa:

TWIERDZENIE 0. Niech $f \in k\{x\}$ spełnia warunek $f(0,\dots,0,x_n) \not\equiv 0$ w otoczeniu 0 i niech m będzie krotnością zera $f(0,\dots,0,x_n)$. Wówczas dla każdego $g \in k\{x\}$ istnieją jednoznacznie wyznaczone $q,r \in k\{x\}$ takie, że $g = q\cdot f + r$ oraz $r = \sum_{i=0}^{m-1} a_i(x_1,\dots,x_{n-1})x_n^i$.

Uogólnienia tego twierdzenia podali najpierw H. Grauert [1] a następnie H. Hironaka [2]. Uogólnienie Hironaki zostanie podane w niniejszym referacie w wersji, z której wynika zarówno twierdzenie Grauerta jak i twierdzenie Weierstrassa.

Najpierw należy uogólnić liczbę m. W tym celu wprowadzamy nowe definicje (pochodzące od Hironaki; patrz także [3],[4], [5]).

DEFINICJA 2. Niech $\Delta : k^n \to k$ będzie formą liniową "dodatnią", to znaczy o współczynnikach nieujemnych, nie wszystkich równych zeru. Dla $f \in k\{x\}$ definiujemy liczbę $v_\Delta(f)$ oraz wykładnik uprzywilejowany w kierunku w kierunku Δ, $\exp_\Delta f$, w sposób następujący:

$$v_\Delta(f) = \min\{\Delta(\mu);\ \mu \in N_f\} = \min_{N_f} \Delta$$

$$\exp_\Delta f = \min \operatorname{lex}\{\mu \in N_f;\ v_\Delta(f) = \Delta(\mu)\}$$

(gdzie "min lex" oznacza minimum leksykograficzne).

PRZYKŁAD. Jeżeli Δ jest formą kanoniczną, to znaczy $\Delta(x_1,\dots,x_n) = x_1 + \dots + x_n$, to piszemy $v(f)$ i $\exp f$ w miejsce $v_\Delta(f)$ i $\exp_\Delta f$. W tym wypadku $v(f)$ jest po prostu stopniem wielomianu początkowego szeregu f, oznaczonego dalej $\operatorname{in} f$.

Dla dowolnego Δ równanie $\Delta = 1$ opisuje hiperpłaszczyznę w $\mathbb{R}^n$. Szukanie $\exp f$ polega na sprawdzeniu kiedy ta hiperpłaszczyzna, przy 1 rosnącym od 0, dotknie zbioru N_f, a następnie na znalezieniu minimum leksykograficznego w zbiorze $N_f \cap \{\Delta = v_\Delta(f)\}$.

LEMAT 1. Mamy następujące proste związki dla Δ formy liniowej "dodatniej" i dla $f,g \in k\{x\}$:

$$\exp_\Delta(f \cdot g) = \exp_\Delta f + \exp_\Delta g$$

$$\exp_\Delta(f + g) \geq \min(\exp_\Delta f, \exp_\Delta g).$$

Przejdźmy teraz do ideałów w $k\{x\}$. Symbol Δ będzie oznaczał w dalszym ciągu formę liniową "dodatnią".

DEFINICJA 3. Niech I będzie ideałem w $k\{x\}$. Przez $E_\Delta(I)$ oznaczamy zbiór wykładników uprzywilejowanych ideału I w kierunku Δ:

$$E_\Delta(I) = \{\exp_\Delta f;\ f \in I\}$$

LEMAT 2. Zbiór $E_\Delta(I)$ ma następujące własności:

(a) jeżeli $\mu \in E_\Delta(I)$, to $\mu + \mathbb{N}^n \subset E_\Delta(I)$

(b) istnieje zbiór skończony $\{\mu_1,\dots,\mu_r\} \subset \mathbb{N}^n$ taki, że

$$E_\Delta(I) = \bigcup_{i=1}^{r} \mu_i + \mathbb{N}^n$$

(c) dla I,J ideałów w $k\{x\}$ mamy

$$I \subset J \Longrightarrow E_\Delta(I) \subset E_\Delta(J).$$

Wszystkie te własności są oczywiste.

UWAGA. Mamy zawieranie $E_\Delta(I) \subset \bigcup_{f\in I} N_f$, jednakże na ogół nie ma tu równości. Zbiór $E_\Delta(I)$ zależy od wyboru Δ, z wyjątkiem przypadku, gdy ideał I jest generowany przez jednomiany. W tym wypadku mianowicie $E_\Delta(I) = \bigcup_{f\in I} N_f$ (a więc nie zależy od Δ).

Zauważmy ponadto, że jeśli I jest generowany przez elementy $f_1,\dots,f_k$ $(I = (f_1,\dots,f_k))$, to zachodzi zawieranie $E_\Delta(I) \supset \bigcup_1^k \exp_\Delta f_i + \mathbb{N}^n$, ale na ogół nie zachodzi tu równość, z wyjątkiem przypadku, gdy $I = (f)$ jest ideałem głównym. Wtedy bowiem $E_\Delta(I) = \exp_\Delta f + \mathbb{N}^n$.

Teraz możemy już wypowiedzieć twierdzenie Hironaki, najpierw w wersji bardzo uproszczonej, ale przydatnej, podanej przez Briançona ([3]):

TWIERDZENIE 1. Niech Δ będzie ustaloną formą "dodatnią" i niech $f_1,\dots,f_k \in k\{x\}$. Wtedy dla każdego $g \in k\{x\}$ istnieją $g_1,\dots,g_k$ oraz R należące do $k\{x\}$ takie, że $g = \sum_1^k g_i f_i + R$ i $N_R \subset \mathbb{N}^n \setminus \bigcup_1^k \exp_\Delta f_i + \mathbb{N}^n$.

Dowód tego twierdzenia podany w pracy [3] jest nietrudny i bardzo podobny do dowodu klasycznego twierdzenia Weierstrassa (twierdzenie 0) podanego przez Houzela. Zauważmy, że twierdzenie 1 nie daje jednoznaczności reszty R ani jednoznaczności dzielników $g_1,\dots,g_k$.

PRZYKŁAD. Rozważmy ideał $I = (X^2 + Y^2, Y)$. W tym przypadku $E_\Delta(I) \neq \bigcup_1^2 \exp_\Delta f_i + N^n$, gdzie

$$f_1(X,Y) = X^2 + Y^2, \qquad f_2(X,Y) = Y.$$

Weźmy teraz $g = Y^3 + X^{10}$. Chcemy podzielić g, wg twierdzenia 1, przez f_1 i f_2. Można to zrobić na wiele sposobów, na przykład

$$Y^3 + X^{10} = Y(X^2 + Y^2) - X^2 \cdot Y + X^{10}$$

lub

$$Y^3 + X^{10} = 0(X^2 + Y^2) + Y^2 \cdot Y + X^{10}$$

lub

$$Y^3 + X^{10} = X^8(X^2 + Y^2) + (Y^2 - YX^8)Y + 0.$$

Z twierdzenia 1 otrzymujemy jednak w sposób prosty następujące bardzo przydatne wnioski:

WNIOSEK 1. Niech będzie dana forma "dodatnia" Δ oraz ideał I w $k\{x\}$. Niech $E_\Delta(I) = \bigcup_1^r \mu_i + \mathbb{N}^n$. Wtedy jeżeli $f_1,\dots,f_r \in I$ są takie, że $\exp_\Delta f_i = \mu_i$, $i = 1,\dots,r$, to generują one ideał I. Tak wybrane generatory nazywamy *bazą standardową* ideału I (cf. [4], [6]).

Dowód. Weźmy element ideału $g \in I$ i podzielmy go przez $f_1,\dots,f_r$ zgodnie z twierdzeniem 1. Otrzymamy $g = \sum_1^r g_i f_i + R$, $R = \sum_{\mu\in N_R} r_\mu x^\mu$, gdzie $N_R \subset \mathbb{N}^n \setminus \bigcup_1^r \mu_i + \mathbb{N}^n = \mathbb{N}^n \setminus E_\Delta(I)$. Ponieważ jednak w tej sytuacji $R \in I$, więc musi być $R \equiv 0$.

WNIOSEK 2. Przy oznaczeniach jak we wniosku 1, jeżeli $\mathbb{N}^n \setminus E_\Delta(I)$ jest zbiorem skończonym

$$\mathbb{N}^n \setminus E_\Delta(I) = \{v_1,\dots,v_s\},$$

to klasy równoważności jednomianów $x^{v_1},\dots,x^{v_s}$ tworzą bazę przestrzeni wektorowej $k\{x\}/I$ nad k.

Dowód. Jeżeli $\sum_1^s \lambda_i x^{v_i} \in I$, $\lambda_i \in k$, $i = 1,\dots,s$, to musi być $\lambda_1 = \dots = \lambda_s = 0$, gdyż $v_i \notin E_\Delta(I)$, $i = 1,\dots,s$.

Jeżeli $g \in k\{x\}$, to bierzemy najpierw $f_1,\dots,f_r$ — bazę standardową I według wniosku 1 i dzielimy g przez $f_1,\dots,f_r$ według twierdzenia 1. Otrzymujemy $g = \sum_1^r g_i f_i + R$. Resztę R można zapisać jako sumę

$$R = \sum_1^s \lambda_i x^{v_i},$$

ponieważ $f_1,\dots,f_r$ zostały wybrane tak, aby $E_\Delta(I) = \bigcup_1^r \exp_\Delta f_i + \mathbb{N}^n$.

Wobec tego dla klas równoważności otrzymujemy równość

$$[g - \sum_1^r g_i f_i] = \sum_1^s \lambda_i [x^{v_i}].$$

Przejdźmy teraz do rozważania funkcji Hilberta-Samuela pierścienia $k\{x\}/I$. Jest to, jak wiadomo, funkcja, która liczbie naturalnej l przyporządkowuje wymiar przestrzeni wektorowej $k\{x\}/I + \mathfrak{m}^{l+1}$, gdzie $\mathfrak{m}$ oznacza ideał maksymalny w $k\{x\}$:

$$H_{k\{x\}/I}(l) = \dim_k k\{x\}/I + \mathfrak{m}^{l+1}.$$

Mamy nastepujące równoważności:

TWIERDZENIE 2. $\dim_k k\{x\}/I < \infty \iff$ istnieje $l \in \mathbb{N}$ taka, że $\mathfrak{m}^l \subset I \iff$ $\iff$ istnieje forma "dodatnia" Δ, dla której $\mathbb{N}^n \setminus E_\Delta(I)$ skończony $\iff$ $\iff$ dla każdej formy "dodatniej" zbiór $\mathbb{N}^n \setminus E_\Delta(I)$ jest skończony.

Dowód. Najpierw przeprowadzimy dowód pierwszej równoważności. Naturalnie, jeżeli istnieje l takie, że $I \supset \mathfrak{m}^l$ (tzn. ideał I jest "definicyjny"), to $\dim k\{x\}/I$ skończony, ponieważ jest oszacowany od góry przez $\dim k\{x\}/\mathfrak{m}^l < \infty$.

Przypuśćmy teraz, że $\dim k\{x\}/I < \infty$. Wykażemy, że $I \supset \mathfrak{m}^l$ dla pewnego l.

Rozważmy ciąg ideałów $\mathfrak{m} \supset I + \mathfrak{m} \supset I + \mathfrak{m}^2 \supset \ldots \supset I + \mathfrak{m}^k \supset \ldots$. Zauważmy, że $\dim k\{x\}/I + \mathfrak{m}^k = \dim k\{x\}/\mathfrak{m} + \ldots + \dim I + \mathfrak{m}^{k-1}/I + \mathfrak{m}^k$. Ponieważ $\dim k\{x\}/I + \mathfrak{m}^k \leq \dim k\{x\}/I < \infty$ są wspólnie ograniczone dla $k = 1,2,\ldots$, więc powyższy ciąg ideałów musi się stabilizować, to znaczy istnieje $k \in \mathbb{N}$ takie, że $I + \mathfrak{m}^k = I + \mathfrak{m}^{k+1} = I + \mathfrak{m}^{k+2} = \ldots$. Zastosujemy teraz lemat Nakayamy:

Niech L, N będą podmodułami modułu M nad pierścieniem lokalnym A, N skończenie generowany i $N \subset L + \mathfrak{m} \cdot N$. Wtedy $N \subset L$.

Stosujemy go do $L = I$, $N = \mathfrak{m}^k$ (k wybrane jak wyżej), $M = k\{x\}$, $A = k\{x\}$. Równość $I + \mathfrak{m}^k = I + \mathfrak{m}^{k+1}$ implikuje $\mathfrak{m}^k \subset I + \mathfrak{m}^{k+1}$ i z lematu Nakayamy otrzymujemy $\mathfrak{m}^k \subset I$, co kończy dowód.

Pozostałe dwie równoważności są oczywiste (Wniosek 2, skończoność zbioru $\mathbb{N}^n \setminus E_\Delta(\mathfrak{m}^l)$ przy dowolnej Δ formie "dodatniej" natychmiast je implikują).

UWAGA. Dla dowolnej formy "dodatniej" Δ zachodzi zawieranie

$$E_\Delta(I + \mathfrak{m}^l) \subset E_\Delta(I) \cup E_\Delta(\mathfrak{m}^l),$$

a dla Δ kanonicznej zachodzi równość

$$E(I + \mathfrak{m}^l) = E(I) \cup E(\mathfrak{m}^l),$$

co wynika stąd, że w tym przypadku $\exp f = \exp(\operatorname{in} f)$.

Równość ta nie musi mieć miejsca dla dowolnej formy "dodatniej" Δ, jak tego dowodzi następujący przykład:

$$I = (X + Y^3), \qquad l = 3, \qquad \Delta(\alpha,\beta) = 5\alpha + \beta.$$

Ponieważ I jest ideałem głównym, mamy

$$E_\Delta(I) = \exp_\Delta(X + Y^3) + \mathbb{N}^2 = (0,3) + \mathbb{N}^2.$$

Ponieważ $\mathfrak{m}^3$ jest generowany przez jednomiany, więc

$$E_\Delta(\mathfrak{m}^3) = (0,3) + \mathbb{N}^2 \cup (1,2) + \mathbb{N}^2 \cup (2,1) + \mathbb{N}^2.$$

Zauważmy, że $X \in I + \mathfrak{m}^3$ i $\exp_\Delta(X) = (1,0) \notin E_\Delta(I) \cup E_\Delta(\mathfrak{m}^3)$.

WNIOSEK 3. Niech I będzie ideałem w $k\{x\}$. Mamy następującą formułę pozwalającą wyliczać funkcję Hilberta-Samuela pierścienia $k\{x\}/I$:

$$H_{k\{x\}/I}(l) = \#(\mathbb{N}^n \setminus E(I + \mathfrak{m}^{l+1})) = \#\{\mu \in \mathbb{N}^n;\ |\mu| \le l \ \text{ i } \ \mu \notin E(I)\}$$

(jest to oczywisty wniosek z poprzednich rozważań).

Sformułujemy teraz twierdzenie o dzieleniu w wersji Hironaki ([2], [4], [5], [6]).

TWIERDZENIE 3. Niech I będzie ideałem w $k\{x\}$, a Δ ustaloną formą "dodatnią" i niech $E_\Delta(I) = \bigcup_{i=1}^{r} \mu_i + \mathbb{N}^n$.

Oznaczmy przez D_1 zbiór $\mu_1 + \mathbb{N}^n$;
przez D_2 zbiór $(\mu_2 + \mathbb{N}^n) \setminus D_1$;
. . . .
przez D_r zbiór $(\mu_r + \mathbb{N}^n) \setminus (D_1 \cup \ldots \cup D_{r-1})$

oraz przez D_{r+1} oznaczmy zbiór $\mathbb{N}^n \setminus E_\Delta(I)$.

Niech $f_1,\dots,f_r \in I$ spełniają warunek $\exp_\Delta f_i = \mu_i$ dla $i = 1,\dots,r$. Wówczas dla każdego $g \in k\{x\}$ istnieją wyznaczone jednoznacznie elementy $g_1,\dots,g_r$, $R \in k\{x\}$ takie, że

$$g = \sum_1^r g_i f_i + R,$$

$$g = \sum_{\{\mu;\mu+\mu_i \in D_i\}} g_\mu^{(i)} x^\mu, \qquad i = 1,\dots,r,$$

$$R = \sum_{\mu \in D_{r+1}} r_\mu x^\mu.$$

Dowód tego twierdzenia znajduje się w pracy Hironaki [2], jego idea podana jest również w sposób prosty w pracy Briançona [3] i Galligo [4]. Należy tu zaznaczyć, że w przypadku pierścienia wielomianów $k[x]$ twierdzenie o dzieleniu ma wypowiedź analogiczną i bardzo prosty dowód. A. Galligo w pracy [6] podaje algorytm pozwalający wyliczać dzielniki i resztę w skończonej ilości kroków (w przypadku pierścienia wielomianów).

Zwróćmy uwagę, że powyższe twierdzenie jest twierdzeniem o dzieleniu "przez ideał", ponieważ szeregi $f_1,\dots,f_r$ (wybrane tak, aby $\exp f_i = \mu_i$), są wg wniosku 1 generatorami ideału I. Otrzymane dzielniki $g_1,\dots,g_r$ zależą od wyboru bazy standardowej $f_1,\dots,f_r$, ale reszta R zależy, jak łatwo widać, wyłącznie dod ideału I.

Zauważmy, że wybór formy Δ przypisuje zmiennym $x_1,\dots,x_n$ pewne wagi. Przy wyborze formy kanonicznej wszystkie zmienne są równouprawnione. Jeżeli chcemy otrzymać z twierdzenia Hironaki (twierdzenie 3) klasyczne twierdzenie Weierstrassa o dzieleniu (twierdzanie 0), to musimy tak wybrać Δ, aby wykładnikiem wyróżnionym szeregu f był wykładnik $(0,\dots,0,m)$. W tym celu wystarczy wziąć

$$\Delta(x_1,\dots,x_n) = x_1 + \dots + x_{n-1}$$

lub

$$\Delta(x_1,\dots,x_n) = mx_1 + \dots + mx_{n-1} + x_n.$$

Stosując twierdzenie Hironaki przy tak wybranym Δ do ideału głównego $I = (f)$ otrzymujemy dla każdego $g \in k\{x\}$

$$g = q \cdot f + R,$$

z q i R jednoznacznymi

$$R = \sum_{\mu \in \mathbb{N}^n \setminus E_\Delta(I)} r_\mu x^\mu .$$

Ale $E_\Delta(I) = (0,\dots,0,m) + \mathbb{N}^n$, więc R zawiera wyłącznie potęgi $x_n,\dots,$ $\dots,x_n^{m-1}$. Po odpowiednim przegrupowaniu mamy więc

$$R = \sum_{i=0}^{m-1} a_i(x_1,\dots,x_{n-1})x_n^i .$$

Zajmijmy się teraz rozważaniem sytuacji, w której Δ jest *ustalona*, formą "dodatnią", a mianowicie formą kanoniczną $\Delta(x_1,\dots,x_n) = x_1 +\dots+ x_n$, natomiast zmienia się układ współrzędnych w k^n (co daje automorfizm pierścienia $k\{x\}$).

Dla ideału $I \subset k\{x\}$ oznaczmy przez in I ideał

$$\text{in } I = \{\text{in } f;\ f \in I\}.$$

Wystarczy ograniczyć się do liniowych zmian układu współrzędnych w k^n. Jeżeli bowiem $\gamma : (k^n,0) \to (k^n,0)$ jest kiełkiem biholomorfizmu otoczenia zera na otoczeniu zera i przez γ^* oznaczymy odpowiadający mu automorfizm $k\{x\}$ na $k\{x\}$, to mamy następującą oczywistą równość:

$$\text{in } (\gamma^*(I)) = (d_o\gamma)^*(\text{in } I)$$

a stąd

$$E(\gamma^*(I)) = E((d_o\gamma)^*(\text{in } I)).$$

Niech M będzie izomorfizmem liniowym k^n na k^n, $M \in \text{Izo }(k^n)$. Oznaczmy przez I^M ideał

$$I^M = \{f \circ M;\ f \in I\}.$$

Oczywiście na ogół ideał I^M jest różny od ideału I. Wyjątek stanowią tu ideały $\mathfrak{m}^l$ tj. potęgi ideału maksymalnego, niezmiennicze względem działania grupy Izo (k^n) na $k\{x\}$. Wobec tego również i zbiory $E(I^M)$ mogą różnić się między sobą, gdy zmieniamy M.

Mamy jednak następujące twierdzenie ([1], [2], [4], [5]):

TWIERDZENIE 4. Niech I będzie ideałem w $k\{x\}$. Wówczas istnieje zbiór $U \subset \text{Izo }(k^n)$ otwarty w sensie Zariskiego i niepusty oraz istnieje podzbiór $\mathbb{N}^n$ zwany niezmiennikiem Grauerta ideału I i oznaczany $\varepsilon(I)$

taki, że

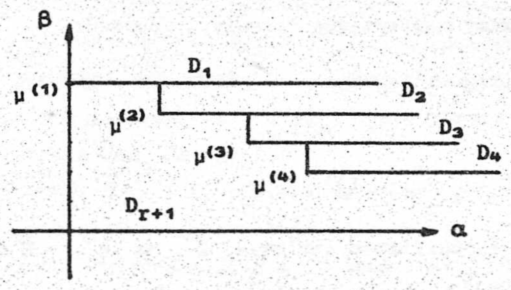
a) dla każdego $M \in U$ zbiór $E(I^M)$ jest równy $\varepsilon(I)$,

b) zbiór $\varepsilon(I)$ posiada następującą własność: jeżeli $\mu \in \varepsilon(I)$, $\mu = (\mu_1,\dots,\mu_n)$, $\mu_l \neq 0$ i $l > l'$, to element $(\mu_1,\dots,\mu_l - 1,\dots,\dots,\mu_{l'}+1,\dots,\mu_n)$ również należy do $\varepsilon(I)$.

Dowód tego twierdzenia znajduje się w pracy Grauerta [1] oraz w pracy Galligo [4].

Zauważmy tu tylko, że zbiory $\varepsilon(I)$ mają specjalną konfigurację. Nie tylko, jako zbiory $E(I^M)$, zawierają wraz z każdym elementem μ całą kątówkę $\mu + \mathbb{N}^n$, ale jeszcze, jeżeli ustalimy wszystkie współrzędne w $\mathbb{N}^n$ oprócz dwóch, zbiór $\varepsilon(I) \cap \mathbb{N}^2$ musi mieć postać "schodków o wysokości jeden", ze względu na własność b).

Prześledźmy to na przykładzie $n = 2$: Ze względu na własność b), zbiór $\varepsilon(I)$ musi zawierać element postaci $(0,\beta_0)$. Również ze względu na własność b), zbiór $\varepsilon(I)$ składać się może tylko z kątówek o wierzchołkach $(0,\beta_0),(\alpha_1,\beta_0 - 1),(\alpha_2,\beta_0 - 2),\dots,(\alpha_k,\beta_0 - k)$, gdzie $0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_k$.



Zauważmy jeszcze, że podaną we wniosku 3 formułę na funkcję Hilberta-Samuela pierścienia $k\{x\}/I$ możemy teraz zapisać tak:

$$H_{k\{x\}/I}(l) = \#\{\mu \in \mathbb{N}^n;\ |\mu| \le l,\ \mu \notin \varepsilon(I)\},$$

ponieważ wymiar jest niezmiennikiem izomorfizmu oraz $E(\mathfrak{m}^{l+1}) = \varepsilon(\mathfrak{m}^{l+1}) = \{\mu;\ |\mu| > l\}$.

Na zakończenie zacytujemy jeszcze za Galligo ([4]) inną formułę na funkcję Hilberta-Samuela, łatwą do otrzymania, po przeliczeniach, z podanych dotąd informacji oraz z następującego twierdzenia:

TWIERDZENIE 5. Niech I będzie ideałem w $k\{x\}$, niech $\varepsilon(I) = \bigcup_1^r \mu^{(i)} + \mathbb{N}^n$ i oznaczmy $d(i) = \min\{k;\ \mu_k^{(i)} \neq 0\}$ (gdzie $\mu^{(i)} = (\mu_1^{(i)}, \ldots, \mu_n^{(i)})$). Wówczas dla zbioru $\varepsilon(I)$ zachodzi:

$$(\mu^{(i)} + \mathbb{N}^n) \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} \mu^{(j)} + \mathbb{N}^n = \mu^{(i)} + \mathbb{N}^{d(i)} \times (0)^{n-d(i)}$$

Oznaczmy teraz przez $P_j(l)$ funkcję Hilberta-Samuela pierścienia $k\{x_1, \ldots, x_j\}$. Mamy więc

$$P_j(l) = \dim_k k\{x_1, \ldots, x_j\}/\mathfrak{m}^{l+1} = \#\{\mu \in \mathbb{N}^j;\ |\mu| \leq l\}.$$

Łatwo wyliczyć, że $P_0(l) = 1$, $P_1(l) = l + 1$ i $P_j(l) = \sum_{m=1}^{l} P_{j-1}(m) + 1$.

Zauważmy, że $P_j(l)$ jest wielomianem stopnia j.

Policzmy teraz funkcję Hilberta-Samuela dla $k\{x\}/I$:

$$H_{k\{x\}/I}(l) = \#\{\mu \in \mathbb{N}^n;\ |\mu| \leq l,\ \mu \notin \varepsilon(I)\},$$

przy czym

$$\varepsilon(I) = \bigcup_1^r \mu^{(i)} + (\mathbb{N}^{d(i)} \times (0)^{n-d(i)}).$$

Łatwo widać, że gdy $|\mu^{(i)}| \leq l$, mamy

$$P_{d(i)}(l - |\mu^{(i)}|) = \#\{\nu \in \mu^{(i)} + (\mathbb{N}^{d(i)} \times (0)^{n-d(i)}),\ |\nu| \leq l\},$$

a stąd

$$H_{k\{x\}/I}(l) = P_n(l) - \sum_{\substack{i=1 \\ |\mu^{(i)}| \leq l}}^{r} P_{d(i)}(l - |\mu^{(i)}|).$$

Z tej formuły wyraźnie wynika znany fakt, że funkcja Hilberta-Samuela jest dla dostatecznie dużych l (mianowicie dla takich, dla których $|\mu^{(1)}| \leq l, \ldots, |\mu^{(r)}| \leq l$) wielomianem stopnia d, gdzie

$$d = \sup\{i;\ \mathbb{N}^i \times (0)^{n-i} \cap \varepsilon(I) = \emptyset\}.$$

Przypomnijmy jeszcze, że d = dim Krulla $k\{x\}/I = \dim V(I)$.

Z zacytowanych tu prac, najwięcej szczegółów oraz najbardziej elementarne dowody zawierają prace Galligo [4] i [6], godne polecenia ze względu na prostotę i czytelność.

Przykłady podane w referacie, dowód Twierdzenia 2 oraz uwaga o postaci $E_{\Delta}(I)$ dla I ideału głównego i I generowanego przez jednomiany pochodzą ode mnie. Wszystkie pozostałe twierdzenia, definicje i uwagi znajdują się w cytowanych pracach.

SPIS LITERATURY

[1] H. Grauert, *Über die Deformation isolierter Singularitäten analytischer Mengen,* Invent. Math. Vol. 15, fasc. 3, (1972).

[2] H. Hironaka, M. Lejeune, B. Teissier, *Résolution des singularités des espaces analytiques complexes,* preprint.

[3] J. Briançon, *Weierstrass preparé à la Hironaka,* Séminaire à Carghése, Astérisque n° 7-8 (1974), p.66-73.

[4] A. Galligo, *Thèse de 3ème cycle,* Universite de Nice.

[5] A. Galligo, *Weierstrass pour un idéal,* Séminaire à Carghèse, Astérisque n° 7-8 (1974), p.165-169.

[6] A. Galligo, *Algorithmes de calcul de base standards,* preprint de l'Université de Nice, n° 9, 1983.

Sielpia, 14-19 stycznia 1985