MATERIAŁY XV KONFERENCJI SZKOLENIOWEJ Z ANALIZY I GEOMETRII ZESPOLONEJ

1994 **Łódź** **str. 11**

O PEWNEJ KLASIE FUNKCJI GENEROWANEJ PRZEZ FUNKCJE ZESPOLONE O OGRANICZONEJ WARIACJI

D. Bartnik (Łódź)

Niech $\mathfrak{P}$ oznacza dobrze znaną rodzinę wszystkich funkcji postaci

$$p(z) = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots , \tag{1}$$

holomorficznych w kole $K = \{z : |z| < 1\}$ i spełniających warunek $\operatorname{Re} p(z) > 0$ dla $z \in K$, zaś S^C klasę funkcji holomorficznych i jednolistnych w kole K, o normalizacji $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ i takich, że obrazem koła K jest obszar wypukły. Jak wiadomo (np. [6], str. 4), funkcja $p \in \mathfrak{P}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$p(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1 + e^{-it}z}{1 - e^{-it}z} d\mu(t), \qquad z \in K, \tag{2}$$

gdzie $\mu \in M$, $M = \{\mu : \mu$ jest niemalejącą funkcją rzeczywistą określoną na przedziale $[0, 2\pi]$ oraz $\int_0^{2\pi} d\mu(t) = 1\}$. Funkcja $f \in S^C$ wtedy i tylko wtedy, gdy ([6])

$$f'(z) = \exp\left[-2\int_0^{2\pi} \log(1 - e^{-it}z) d\mu(t)\right], \qquad z \in K, \tag{3}$$

gdzie $\mu \in M$.

Znana jest również klasa V_k ([3]) funkcji postaci (3) dla $\mu \in M_k$, gdzie $M_k = \{\mu : \mu$ jest funkcją rzeczywistą o o ograniczonej wariacji określoną na przedziale $[0,2\pi]$, $\int_0^{2\pi} d\mu(t)=1$, $\int_0^{2\pi}|d\mu(t)|\le\frac{k}{2}$, $k\ge 2\}$ oraz rodzina P_k ([4]) funkcji postaci (2) dla $\mu\in M_k$.

V. Starkov ([9]) wprowadził klasę U'_α, $\alpha\ge 1$, funkcji postaci (3), gdzie $\mu\in I_\alpha$. I_α oznacza tu rodzinę wszystkich funkcji zespolonych μ o o ograniczonej wariacji i spełniających warunek

$$\Big|\int_0^{2\pi} d\mu(t)-1\Big|+\int_0^{2\pi}|d\mu(t)|\le\alpha. \tag{4}$$

Jest widoczne, że dla $\alpha<1$ klasa I_α redukuje się do zbioru pustego. Co więcej, I_1 jest rodziną niemalejących funkcji rzeczywistych takich, że $\int_0^{2\pi} d\mu(t)\le 1$.

Aby wyjaśnić sens geometryczny nierówności (4) przypomnijmy definicję uniwersalnej rodziny liniowo-niezmienniczej ([5]).

Niech $\mathfrak{M}$ będzie pewną klasą funkcji postaci $f(z)=z+\dots$, holomorficznych i lokalnie jednolistnych w K. $\mathfrak{M}$ nazywamy rodziną liniowo-niezmienniczą, jeśli dla każdej homografii Φ przekształcającej koło K na siebie wraz z funkcją f należy do klasy $\mathfrak{M}$ funkcja

$$\Lambda_\Phi[f(z)]=\frac{f(\Phi(z))-f(\Phi(0))}{f'(\Phi(0))\Phi'(0)}=z+\dots,\qquad z\in K.$$

Liczbę

$$\operatorname{ord}\mathfrak{M}=\sup_{f\in\mathfrak{M}}\frac{|f''(0)|}{2}$$

nazywamy rzędem liniowo-niezmienniczej rodziny $\mathfrak{M}$. W [5] wykazano, że

$$\operatorname{ord}\mathfrak{M}=\sup_{f\in\mathfrak{M}}\sup_{z\in K}\left|-\bar z+\frac{1}{2}(1-|z|^2)\frac{f''(z)}{f'(z)}\right|.$$

Oznaczmy przez U_α, $1\le\alpha<\infty$, sumę tych wszystkich liniowo-niezmienniczych rodzin $\mathfrak{M}$, których rząd jest nie większy niż α. Wiadomo ([5]), że uniwersalna liniowo-niezmiennicza rodzina U_α jest złożona z wszystkich holomorficznych i lokalnie jednolistnych funkcji $f(z)=z+\dots$, dla których

$$\sup_{z\in K}\Big|-\bar z+\frac{1}{2}(1-|z|^2)\frac{f''(z)}{f'(z)}\Big|\le\alpha.$$

Okazuje się ([9]), iż klasa U'_α generowana przez funkcje μ spełniające warunek (4) jest rodziną liniowo-niezmienniczą rzędu α i ponadto $U'_\alpha\subsetneq U_\alpha$.

Interesujące wydaje się zbadanie rodziny funkcji określonych następująco:

Definicja 1. Niech $\mathfrak{P}'_\alpha$, $\alpha\ge 1$, oznacza klasę funkcji określonych wzorem (2), gdzie μ są elementami zdefiniowanej wcześniej klasy I_α.

Bezpośrednio z definicji wynikają następujące własności:

Własność 1. *Ma miejsce inkluzja* $\mathfrak{P}\subset\mathfrak{P}'_1$.

Własność 2. *Jeżeli $\alpha_1 < \alpha_2$, to $\mathfrak{P}'_{\alpha_1} \subset \mathfrak{P}'_{\alpha_2}$.*

Zachodzi także

Twierdzenie 1. *Zbiór Q funkcji p postaci $p = \sum_{k=1}^{n} a_k p_k$, $p_k \in \mathfrak{P}$, $a_k \in C$, $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k - 1\right| + \sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq \alpha$, $n = 1, 2, \ldots$, jest wszędzie gęsty w $\mathfrak{P}'_\alpha$.*

Z powyższego twierdzenia otrzymujemy następujące wnioski:

Wniosek 1. *Jeżeli $p(z) \in \mathfrak{P}'_\alpha$, to $p(e^{i\theta} z) \in \mathfrak{P}'_\alpha$ dla $\theta \in R$.*

Wniosek 2. *Jeżeli $p(z) \in \mathfrak{P}'_\alpha$, to $p(rz) \in \mathfrak{P}'_\alpha$ dla $r \in [-1, 1]$.*

Wniosek 3. *Jeżeli $p \in \mathfrak{P}'_\alpha$, to $p \circ \omega \in \mathfrak{P}'_\alpha$, gdzie ω jest funkcją Schwarza (tj. ω jest funkcją holomorficzną w K, $\omega(0) = 0$ i $|\omega(z)| < 1$ dla $z \in K$).*

Prostymi przykładami funkcji klasy $\mathfrak{P}'_\alpha$ są:

1) $p_1(z) = \frac{(\alpha-1)i}{2}\frac{1+z}{1-z}$, $z \in K$, $\alpha > 1$, która przekształca konforemnie koło K na zbiór $\{w : [0, 2\pi] Rew > 0\}$;
2) $p_2(z) = \frac{1-\alpha}{2}\frac{1+z}{1-z}$, $z \in K$, $\alpha > 1$, przekształcająca konforemnie koło K na $\{w : \mathrm{Re}\, w < 0\}$;
3) $p_3(z) = \frac{(\alpha-1)iz}{1-z^2} = \frac{(\alpha-1)i}{4}\frac{1+z}{1-z} + \frac{(1-\alpha)i}{4}\frac{1-z}{1+z}$, $z \in K$, $\alpha > 1$, która przekształca koło K na $C \backslash \{w : [0, 2\pi] Rew = 0 \wedge (\mathrm{Re}\, w \leq \frac{1-\alpha}{2} \vee \mathrm{Re}\, w \geq \frac{\alpha-1}{2}\}$.

Można udowodnić

Twierdzenie 2. *Klasa $\mathfrak{P}'_\alpha$ jest zwarta w topologii zbieżności niemal jednolistnej w K.*

Niech $p \in \mathfrak{P}'_{\alpha_0}$, $\alpha_0 > 1$. Oczywiście odpowiadająca jej funkcja $\mu \in I_{\alpha_0}$. Z (4) wynika, że może istnieć α, $1 \leq \alpha < \alpha_0$ takie, że $\mu \in I_\alpha$. Najlepszą charakterystykę funkcji μ, a zatem i p daje liczba α_*, dla której

$$\left| \int_0^{2\pi} d\mu(t) - 1 \right| + \int_0^{2\pi} |d\mu(t)| = \alpha_*.$$

Definicja 2. Niech $p \in \mathfrak{P}'_{\alpha_0}$. Stopniem funkcji p nazywamy taką liczbę $\alpha_* \leq \alpha_0$, że $p \in \mathfrak{P}'_{\alpha_*}$ i $p \notin \mathfrak{P}'_{\alpha_* - \varepsilon}$ dla $\varepsilon > 0$. Stopień funkcji p oznaczamy przez $\deg p$.

Bezpośrednio z własności 2 wynika

Własność 3. *Jeżeli $\deg p = \alpha_*$, $\alpha_* > 1$, to $p \in \mathfrak{P}'_\alpha$ dla $\alpha \geq \alpha_*$ i $p \notin \mathfrak{P}'_\alpha$ dla $1 \leq \alpha < \alpha_*$. Jeżeli $\deg p = 1$, to $p \in \mathfrak{P}'_\alpha$ dla $\alpha \geq 1$.*

Rozważmy zbiór B wszystkich funkcji holomorficznych in the disc K, dla których

$$\|f\| = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \rho_n(f) < \infty,$$

gdzie $\rho_n(f) = \max_{|z| \leq 1 - \frac{1}{n}} |f(z)|$. Jak wiadomo B jest przestrzenią Banacha. Nadto z (2) i (4) wnioskujemy, że $\mathfrak{P}'_\alpha \subset B$. Ma miejsce

Twierdzenie 3. *Niech F będzie funkcjonałem różniczkowalnym w sensie Frecheta określonym na $\mathfrak{P}'_{\alpha_0}$, L_p jego różniczką w punkcie p, a p_0 funkcją ekstremalną w zadaniu*

$$\max_{p\in\mathfrak{P}'_{\alpha_0}} \operatorname{Re}\{F(p^{(n)}\}, \qquad 1 \le \alpha_0 < \infty, \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

Jeżeli istnieje $k > n$ takie, że $L_{p_0^{(n)}}(z^{k-n}) \neq 0$, to $\deg p_0 = \alpha_0$.

Niech $p \in \mathfrak{P}'_\alpha$, $\alpha \ge 1$, i niech $\{p\}_k$, $k = 0, 1, \dots$, oznacza k-ty współczynnik rozwinięcia funkcji p w szereg potęgowy o środku w punkcie $z = 0$.

Twierdzenie 3 pozwala wykazać

Lemat 1. *Jeżeli $p_0(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1+e^{-it}z}{1-e^{-it}z} d\mu_0(t)$ jest funkcją ekstremalną w zadaniu*

$$\max_{p\in\mathfrak{P}'_{\alpha_0}} |\{p\}_k|, \qquad k = 1, 2, \dots ,$$

to $\int_0^{2\pi} d\mu_0(t) = 1$ i $\int_0^{2\pi} |d\mu_0(t)| = \alpha$.

Wykorzystując zaś lemat 1 możemy udowodnić

Twierdzenie 4. *Jeżeli $p \in \mathfrak{P}'_\alpha$, $\alpha \ge 1$, to*

$$|\{p\}_k| \le 2\alpha, \qquad k = 1, 2, \dots .$$

Równość zachodzi dla funkcji

$$p(z) = \frac{1+\alpha}{2}\frac{1+\varepsilon z}{1-\varepsilon z} + \frac{1-\alpha}{2}\frac{1-\varepsilon z}{1+\varepsilon z}, \qquad z \in K, \quad |\varepsilon| = 1.$$

Z twierdzenia 2, wniosków 1 i 2 otrzymujemy

Wniosek 4. *Jeżeli $p \in \mathfrak{P}'_\alpha$, $\alpha \ge 1$, to zbiorem V_k wartości funkcjonału $H(p) = \{p\}_k$, $k = 1, 2, \dots$, jest koło domknięte o środku w punkcie 0 i promieniu 2α.*

Prawdziwe jest również

Twierdzenie 5. *Jeżeli $p \in \mathfrak{P}'_\alpha$, $\alpha > 1$, to zbiorem V_0 wartości współczynnika $\{p\}_0$ jest elipsa*

$$\frac{(\operatorname{Re} A - \frac{1}{2})^2}{\frac{\alpha^2}{4}} + \frac{([0, 2\pi]ReA)^2}{\frac{\alpha^2-1}{4}} \le 1.$$

Jeżeli $p \in \mathfrak{P}'_1$ to $V_0 = [0, 1]$.

Twierdzenie 6. *Jeżeli $p \in \mathfrak{P}'_\alpha$, $\alpha \ge 1$, to*

$$\frac{1+r}{1-r}\frac{\alpha-1}{2} \le \operatorname{Re}[p(z)] \le \frac{1+r}{1-r}\frac{\alpha+1}{2}, \qquad |z| = r, \quad z \in K.$$

Równość, w przypadku oszacowania "z dołu", otrzymujemy dla funkcji postaci

$$p(z) = \frac{1+\varepsilon z}{1-\varepsilon z} + \frac{1-\alpha}{2}, \qquad z \in K, \quad |\varepsilon| = 1,$$

zaś w przypadku oszacowania "z góry" dla funkcji

$$p(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1+e^{-it}z}{1-e^{-it}z} \frac{(1-re^{-it})^2}{|1-re^{-it}|^2} e^{it} d\beta(t), \qquad |z| = r, \quad z \in K,$$

gdzie β jest niemalejącą funkcją rzeczywistą (schodkową lub nie) taką, że

$$\int_0^{2\pi} |d\beta(t)| = \frac{\alpha+1}{2} \qquad \text{i} \qquad \left| \int_0^{2\pi} \frac{(1-re^{-it})^2}{|1-re^{-it}|^2} e^{it} d\beta(t) - 1 \right| = \frac{\alpha+1}{2}.$$

W dowodzie twierdzenia 6 wykorzystana została metoda przedstawiona przez V. Starkova w pracy [9] (por. też [2], [7], [8]).

Dowody przedstawionych powyżej twierdzeń zawarte są w pracy [1].

SPIS LITERATURY

1. D. Bartnik, *On some class of functions generated by complex functions with bounded variation*, (w druku).
2. J. Godula, V.V. Starkov, *On the Jakubowski's functional in a linearly invariant family*, Folia Sci. Univ. Techn. Resov. **73** (1990), Mat. 9, 19–27.
3. V. Paatero, *Über die konforme Abbildungen von Gebieten, deren Ränder von Beschränkter Drehung sind*, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A **33** (1933), no. 9, 1–79.
4. B. Pinchuk, *Functions of bounded rotation*, Israel J. Math. **10** (1971), 6–16.
5. Ch. Pommerenke, *Linear-invariante Familien analytischer Funktionen I*, Math. Annalen **155** (1964), 108–154.
6. G. Schober, *Univalent Functions - Selected Topics*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1975.
7. V.V. Starkov, *K ocenke koe'fficientow w klasse U'_α lokal'no odnolistnych funkcij*, Westnik LGU **13** (1984), 48–54.
8. ———, *Ob odnom nerawenstwe dlja koe'fficientow funkcij nekotorogo linejno-inwariantnogo semejstwa*, Comptes Rendus de l'Acad. Bul. des Sci. **37** (1984), no. 8, 999–1002.
9. ———, *O nekatorych podklassach linejno-inwariantnych semejstw, imejuščich integral'noe predstawlenie*, Dep. VINITI **3341** (1981), 1–50.

ON SOME CLASS OF FUNCTIONS GENERATED BY COMPLEX FUNCTIONS WITH BOUNDED VARIATION

Summary. Let $\mathfrak{P}'_\alpha$ denote the family of functions p given by the integral

$$p(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1+e^{-it}z}{1-e^{-it}z} d\mu(t), \qquad z \in K = \{z : |z| < 1\},$$

whereas μ is a complex function with bounded variation, satisfying the condition

$$\left| \int_0^{2\pi} d\mu(t) - 1 \right| + \int_0^{2\pi} |d\mu(t)| \le \alpha \qquad \text{for} \quad \alpha \ge 1.$$

In this paper we give the properties of the class $\mathfrak{P}'_\alpha$, estimates of coefficients and of the real part in the class $\mathfrak{P}'_\alpha$.

Bronisławów, 11–15 stycznia, 1993 r.