

Liga Matematyczna Uniwersytetu Łódzkiego

Seria I 22/23

Za każde zadanie można dostać max. 10. p. Rozwiązania zadań należy oddać w wersji papierowej (każde zadanie na osobnej kartce) do pokoju B207 lub w wersji elektronicznej na adres: piotr.nowakowski@wmii.uni.lodz.pl. Ostateczny termin złożenia rozwiązań: 16.11.2022.

Zadanie 1. Wykaż, że nie istnieje ciąg arytmetyczny taki, że jego kolejne trzy wyrazy są jednocześnie różnymi wyrazami ciągu (2^n) .

Zadanie 2. Jaka jest największa i najmniejsza liczba (niezaczynająca się od zera), zawierająca wszystkie cyfry od 0 do 9 (przy czym każda występuje dokładnie raz) i podzielna przez 11?

Zadanie 3. Niech $M \subset \mathbb{N}$ będzie zbiorem takim, że dla dowolnych $n, m \in M$

$$n > m \Rightarrow n - m \geq \frac{nm}{25}.$$

Jaka jest największa możliwa liczba elementów zbioru M ?

Zadanie 4. Dla $n \in \mathbb{N}$ rozwiąż następujące równanie w liczbach całkowitych:

$$\left(2 - \frac{1}{x_1}\right) \left(2 - \frac{1}{x_2}\right) \dots \left(2 - \frac{1}{x_n}\right) = 3.$$

Zadanie 5. Ustalmy $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Dwoje graczy gra w następującą grę. Zaczynając od $k = 2$, każdy gracz ma dwa możliwe ruchy: może zastąpić k przez $k + 1$ lub przez $2k$. Gracz, który jest zmuszony wybrać liczbę większą niż n , przegrywa. Dla poszczególnych n , który gracz (pierwszy czy drugi) ma strategię wygrywającą, tzn. strategię której zastosowanie zapewni mu zwycięstwo, niezależnie od ruchów rywala?